510.5
IN
V.26

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

510.5
IN
V. 26

MATHEMATICS
DEPARTMENT

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

To renew call Telephone Center, 333-8400

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

OCT 23 1981
OCT 19 REC'D

L161—O-1096

Digitized by the Internet Archive
in 2021 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/lintermediairede2619unse

21205
252
ell

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

LIBRARY
INVESTIGACIONES
CUBANAS

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
AT URBANA

EN
Y.26
Math. Sem.

L'INTERMÉDIAIRE
DES
MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET ÉMILE LEMOINE

DIRECTEUR-FONDATEUR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien Examinateur à l'École Polytechnique.

DIRECTEURS-RÉDACTEURS

Ed. MAILLET,
Docteur ès Sciences,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
Examinateur des Élèves à l'École Polytechnique.

A. MALUSKI,
Agrégé de Mathématiques,
Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Proviseur du Lycée de Soeaux.

A. BOULANGER,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

Publication honorée d'une souscription du Ministère
de l'Instruction publique.

TOME XXVI. — 1919.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1919

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL (12 NUMÉROS)

Paris..... 7 fr. | Dép. et Union postale... 8 fr. 50

Les douze numéros forment chaque année un Volume de 300 pages au moins.

510.5
IN

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

QUESTIONS [1].

1881. [Σ] (*voir* aussi **1918**, 1). Prix académiques (Académie des Sciences de Paris).

Prix Damoiseau pour 1920 (2000fr). — Calculer plus exactement, en tenant compte des résultats des expéditions récentes, l'attraction de la Lune sur le bourrelet formé à la surface de la Terre par les marées. Examiner l'effet de cette attraction sur la vitesse angulaire de rotation de la Terre (question remise au concours).

Prix Bordin pour 1921 (3000fr). — Perfectionner les

[1] Nous espérons pouvoir reprendre dans le courant du premier semestre de 1919 la publication par numéros mensuels, tout au moins augmenter le nombre de pages, comme nous le faisons déjà pour le présent numéro de janvier-février, qui a 32 pages au lieu de 24. Pour cela nous faisons naturellement appel au concours de nos correspondants.

Nous croyons devoir signaler à leur attention les observations publiées en tête du Tome XI (1904) de l'*Intermédiaire* et précisées à la page 146 du Tome XXIII (1916), notamment au sujet des réponses trop longues, ainsi que les observations reproduites périodiquement à la fin de la deuxième ou troisième page de la couverture. L'oubli de certaines d'entre elles (longueur des questions et réponses, figures, écriture des formules, indices, signes, *ponctuation*) peut amener un retard dans la publication et compliquer le travail de l'Imprimerie et de la Rédaction.

Nos lecteurs trouveront, en tête du Tome XI (1904) ou dans l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques* (Paris, Gauthier-Villars), la liste des abréviations conventionnelles employées pour désigner les principaux Recueils cités. LA RÉDACTION.

478611

théories sur l'*Analysis situs*, développées par Poincaré dans des Mémoires célèbres. On cherchera à rattacher, au moins dans des cas particuliers étendus, les questions de géométrie de situation, concernant une multiplicité donnée, à l'étude d'expressions analytiques convenablement choisies.

Pour plus de détails voir *C. R.*, t. 167, 2 décembre 1918.

La Rédaction.

4882. [**M'8 g**] Peut-il exister une courbe en 8, à un seul axe de symétrie, dont le point double soit centre de similitude des deux boucles? H. Brocard.

4883. [**L²4a**] J'ai rencontré, depuis longtemps, au *Journal de Crelle*, t. 26, 1843, p. 268-272, une étude de Kummer au sujet de l'équation en S, discutée dans les Ouvrages de Géométrie analytique.

La lecture de cet article m'a semblé assez difficile par suite de confusion typographique entre mêmes lettres de significations pourtant différentes.

Existe-t-il un résumé de cette analyse dans quelque Ouvrage?

Pourrait-on le présenter de façon plus claire et préciser le résultat relatif à certaine somme de carrés?

H. Brocard.

4884. [**K14**] Je serais désireux d'avoir tous renseignements sur les polyèdres à éléments opposables (face à arête comme dans l'hexaèdre à faces triangulaires ou double tétraèdre, face à face comme dans l'hexaèdre à faces quadrilatères) et en particulier sur l'étude de l'hexaèdre à faces quadrilatères qui donne des théorèmes correspondants, pour l'espace, à ceux de Pascal et de Brianchon pour le plan.

Despujols.

4885. [**V 7**] On sait que le manuscrit autographe des *Pensées* de Pascal se compose en grande partie de morceaux écrits sur de petits papiers de toute forme. « Quelques-uns,

dit l'abbé Maynard, *portent des figures de géométrie ou des opérations d'arithmétique.* »

A-t-on jamais examiné ces papiers au point de vue mathématique? Un collègue jouissant de quelques loisirs et habitant Paris pourrait-il nous donner un relevé complet, ou tout au moins un aperçu de ces figures et de ces calculs?

L. Chanzy.

4886. [**I 19 c**] Dans les arithmotriangles dont les côtés sont donnés par les formules

$$a = (3p^2 + q^2)^2, \qquad b = 8pq(q^2 - 3p^2),$$
$$c = (3p^2 + 6pq - q^2)(q^2 + 2pq - 3p^2)$$

la distance IO des centres des cercles inscrit et circonscrit est un entier

$$IO = |(3p^2 + q^2)(3p^2 + 2pq - q^2)|;$$

exemple : $a = 49$, $b = 16$, $c = 55$, $IO = 21$.

Connaît-on d'autres exemples particuliers ou généraux de tels triangles?

R. Goormaghtigh.

4887. [**K 21 a**] Est-il possible au moyen de la règle et du compas de construire un triangle quand on a donné les projections du centre du cercle des neuf points O_9 sur les trois côtés?

Sinon, comment le démontrer?

N.-R. Pehelharingtz (Gröningue).

4888. [**K 8**] Je désirerais une démonstration de la propriété suivante, en admettant qu'elle soit exacte :

Les centres des cercles inscrits ou exinscrits aux quatre triangles d'un quadrilatère complet sont par groupes de quatre, situés sur quatre cercles, dont les centres sont en ligne droite, et qui sont orthogonaux à un cercle fixe.

G. Boulland.

4889. [**V 10**] Dans le *Mercure de France* du 1er octobre 1918, p. 567, il est question d'un Allemand nommé Gra-

matski, qui aurait écrit en Norvège, « un savant Traité de mathématiques supérieures », et traduit « le grand Ouvrage de mathématiques de Macody Lund, une œuvre d'importance nationale, selon Gramatski ».

Ces deux mathématiciens, dont je lis les noms pour la première fois, sont-ils connus? P. Hendlé.

4890. [**L' 9 d**] Appelons avec Chasles « arcs associés sur une conique C » deux arcs dont la différence est rectifiable par la ligne droite.

Lorsque la conique C est une hyperbole équilatère H, à deux arcs associés sur la courbe correspondent sur la lemniscate, podaire centrale de H, deux arcs égaux. Ce théorème est dû à Chasles.

Existe-t-il quelque théorème analogue pour la podaire centrale de la conique C lorsque celle-ci est quelconque?

F. Balitrand.

4891. [**M' 8 a**] Démontrer que pour toute épi ou hypocycloïde, l'aire d'un secteur ayant pour sommet le centre du cercle fixe et pour base un arc quelconque de la courbe est proportionnelle à l'aire du secteur correspondant de sa podaire, prise par rapport au centre du cercle fixe.

Cet énoncé doit remplacer celui de la question 4834 (**1918**, 32), résolue **1918**, 117. L'erreur commise provient d'une confusion entre les deux énoncés.

F. Balitrand.

4892. [**J 1**] On trouve

$$1 + 3^p C_n^1 + 5^p C_n^2 + 7^p C_n^3 + \ldots = 2^n P_p,$$

P_p étant un polynome entier en n de degré p. Par induction, je trouve

$$P_p = 1 + \frac{3^p - 1}{2} n + \frac{5^p - 2.3^p + 1}{2^2} \frac{n(n-1)}{1.2}$$
$$+ \frac{7^p - 3.5^p + 3.3^p - 1}{2^3} \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots;$$

la loi est manifeste. Je désirerais une démonstration rigoureuse.

Remarque :

$$(2n+1)^p - n(2n-1)^p + \frac{n(n-1)}{1.2}(2n-3)^p - \ldots$$

est exactement divisible par $n!\,2^n$. A. Boutin.

4893. [**I 19**] Soit l'équation

$$ab(a^2+b^2) = cd(c^2+d^2).$$

Quelles sont les formules générales de solution connues? Je possède trois formules de degrés respectifs : 7, 13 et 19.

M. Rignaux.

4894. [**Q 4b**] On sait que le cavalier peut parcourir l'échiquier de 64 cases de façon à former un carré semi-magique. Quel est le nombre de solutions connues? Où pourrai-je me les procurer? M. Rignaux.

4895. [**I 19**] Étant donnée l'équation, en nombres entiers,

$$x^n + y^n = z^n + \alpha \qquad (x \neq y \neq z),$$

déterminer la plus petite valeur de α (positive ou négative), pour un exposant n donné. Pour $n = 2$, on a évidemment $\alpha = 0$. M. Rignaux.

4896. [**I 19**] Les théorèmes suivants sont-ils connus :

a. Passé $n = 2$, l'identité en nombres entiers

$$(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_q^n)(\alpha_1^n + \ldots + \alpha_q^n) = A_1^n + A_2^n + \ldots + A_q^n$$

est impossible quand $q > 1$?

b. Quand on a une solution de $2\delta^2 M^4 - N^4 = C^2$, on peut trouver des fonctions A et B, *de* M, N, C, *solutions de* $A^4 - 2\delta^2 B^4 = Q^2$.

(Ces fonctions seraient les généralisations de celles que M. Cipolla a signalées pour $\delta = 1$; voir *I. M.*, 4755, p. 83, 1918.)

c. Quand on a une solution de $P^4 - dQ^4 = 2W^2$ *ou de* $M^4 - dN^4 = V^2$, *on peut trouver des fonctions* A *et* B, *de* P, Q, W *ou de* M, N, V, *solutions de* $A^4 + dB^4 = Z^2$.

DESPUJOLS.

4897. [**I 19**] Les théorèmes suivants sont-ils connus :

a. Le produit K *de trois entiers consécutifs rend possible l'équation* $X_1^4 - X_2^4 = Kc^2$.

b. Le nombre nA, *défini par* $A^2 - nB^2 = 1$ *est une valeur de* K *rendant possible la même équation* ($n \neq \square$).

c. S'il peut être fait en entiers, et de deux ou plusieurs manières différentes

$$X_1^4 + aX_1^3X_2 + \ldots + dX_2^4 = 1,$$

l'équation $f^4 + af^3 + \ldots + d = 0$ *admet nécessairement une racine réelle et irrationnelle.*

Je désirerais, à leur égard, toutes références bibliographiques possibles. DESPUJOLS.

4898. [**I 19**] Résoudre en nombres entiers ou rationnels la quartique

$$y^4 + 6(3\lambda^2 - 8\mu)y^2 + 9\lambda^2(9\lambda^2 - 16\mu) = c^2$$
$$[\lambda = p^2 + q^2, \qquad \mu = (p - q)(p^3 - q^3)]$$

généralement ou pour des valeurs particulières de p et de q.

La résolution de cette quartique donne, en prenant

$$\alpha = \beta \pm 6\lambda, \qquad \beta = y - 3\lambda,$$

la solution du problème **2210** (**1901**, 256, **1917**, 127) de M. E.-B. Escott. DESPUJOLS.

2249. [Σ] (**1901**, 310) Étudier la *décomposabilité* des groupes connus de Lie et de substitutions entre n lettres, en particulier les divers modes de décomposition de ces groupes, les suites analogues aux suites de décomposition

de M. Jordan et dont nous avons signalé l'existence. [*Consulter*, à ce sujet, notre Mémoire : *Sur les analogies entre la théorie des groupes de substitutions et celle des groupes finis continus de transformations de Lie*, en particulier p. 44 et 51 (*Journ. de Math.*, p. 13; 1901).]

Ed. Maillet.

2258. [**I 18 c**] (**1902**, 4) Toute puissance sixième n^6 d'un entier $n > 1$ est la somme de trois hexagones et d'un triangle de rang pair, tous $\neq 0$.

Pour $n > 2$, deux quelconques des composants ne sont ni égaux, ni consécutifs. G. de Rocquigny.

2259. [**F 3**] (**1902**, 4) Les calculs usuels qui se présentent dans l'application des fonctions elliptiques aux problèmes classiques utilisent des développements en séries limités aux premiers termes, et des Tables telles que celles de Legendre ou celles abrégées de M. Humbert.

A-t-on jamais examiné sur quelle approximation l'on peut compter dans les divers types de calcul par l'emploi de ces deux instruments?

A-t-on traité le problème inverse de déterminer les termes à prendre dans les développements en séries pour obtenir dans tel de ces calculs une approximation donnée à l'avance?

A. Boulanger.

2260. [**F** et **X 3a**] (**1902**, 4) Les nomographes ont-ils essayé d'appliquer les abaques aux calculs de fonctions elliptiques, dans le cas où l'on peut se contenter d'une approximation grossière? A. Boulanger.

2272. [**O 6**] (**1902**, 8) A propos de la réponse à 2081 (**1901**, 130) et des exemples cités, pourrait-on démontrer que toute surface complètement unilatère, ou unilatère dans une de ses parties, possède, dans cette partie, un point (au moins) dont le cône des normales est tel que son intersection avec une sphère concentrique donne lieu à une courbe

possédant des points diamétralement opposés qui appartiennent à une même branche de la courbe? Et réciproquement.

Il me semble que le problème de la recherche de surfaces unilatères serait alors bien simplifié et pourrait consister à construire l'équation de surfaces ayant de telles singularités.

V. Aubry.

2273. [**O6**] (**1902**, 8) La proposition suivante est-elle exacte?

« Si une surface possède une génératrice (courbe ou non) pour les points de laquelle l'indicatrice est parabolique et une courbe double, la surface est unilatère. »

Ma démonstration ne me satisfait pas complètement.

V. Aubry.

2277. [**K1**] (**1902**, 33) A propos du théorème de Stewart, Chasles, à la page 176 de son *Aperçu historique*, donne en note une relation générale entre cinq points situés en ligne droite.

La démonstration de cette relation a-t-elle été publiée?

Canon.

2286. [**I17**] (S) (**1902**, 36) La somme des n premiers cubes impairs peut toujours être mise sous la forme d'une somme de 7 carrés $\neq 0$.

Corollaire : $2n^4 =$ somme de 8 carrés $\neq 0$, $n > 1$.

G. de Rocquigny.

2287. [Σ] (**1902**, 36) On a beaucoup étudié les surfaces minima; néanmoins je ne sais si l'on a déterminé celles de ces surfaces qui ont leurs lignes de courbure sphériques; dans le cas où la question n'aurait pas été traitée, elle pourrait constituer un intéressant sujet d'étude.

Servant.

RÉPONSES.

52 (**1894**, 20) (A. Boutin). — *Équations indéterminées et séries récurrentes* (**1895**, 322). — J'ai démontré, dans une étude qui paraîtra au *Sphinx Œdipe* (Journal de M. Gérardin), après la guerre, le théorème suivant :

Toute équation indéterminée du deuxième degré

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

à discriminant négatif

$$ac - b^2 < 0,$$

est complètement résolue par des séries récurrentes dont la loi est : pour les valeurs de x,

$$T_{n+1} = M T_n - T_{n-1} - \frac{(be - cd)(M - 2)}{ac - b^2};$$

pour les valeurs de y,

$$T_{n+1} = M T_n - T_{n-1} - \frac{(bd - ae)(M - 2)}{ac - b^2},$$

M *étant un coefficient à déterminer.* M. Rignaux.

843 (**1896**, 126) (R. Guimaraes). — *Au sujet d'équations de la balistique.* — Cette question, proposée depuis vingt-deux ans, a perdu beaucoup de son intérêt au cours de la guerre mondiale qui a complètement bouleversé les anciens cadres de la balistique.

L'énoncé paraît au surplus avoir été inexactement transcrit, de sorte que le mieux est d'en proposer le retrait.

C'est ce que l'auteur m'a déclaré avoir demandé depuis 1914.

H. Brocard.

Note. — A cet article nous avons le vif regret d'ajouter la nouvelle, récemment reçue, du décès de M. R. Guimaraes.

La Rédaction.

2043 (**1901**, 60; **1915**, 270) (H. Brocard). — *Cadrans lunaires.* —

Il est question des cadrans lunaires dans les *Récréations mathématiques et physiques* d'Ozanam (Ed. de 1768, t. III, p. 275).

Ozanam résout les deux problèmes suivants : *Connaître les heures à un cadran solaire éclairé par la Lune; construire un cadran qui marque l'heure à la Lune.*

Ce dernier montre qu'au XVIIIe siècle, on savait construire des cadrans lunaires, et la façon dont il est traité fait supposer qu'on en construisait effectivement.

Ozanam donne ensuite, p. 290, quelques indications bibliographiques sur les principaux traités de gnomonique. Il n'est fait aucune allusion aux cadrans lunaires. F. BALITRAND.

2087 (**1901**, 131) (*E.-A. Majol*). — *Neuvième point commun aux cubiques passant par huit points donnés* (**1916**, 55). — Des constructions à l'aide de la règle seulement ont été données par HART (1851) (solution rappelée dans la réponse **1916**, 55); par DURÈGE (*Die ebenen Curven dritter Ordnung*, Leipzig, 1871, p. 160); par SCHROETER (*Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung*, Leipzig, 1888, p. 75) et par LONDON (*Mathematische Annalen*, t. 36, 1890). Le nombre des droites qu'exigent ces constructions a été examiné par LANGE (*Zeichnung des neunten Schnittpunktes zweier Kurven dritter Ordnung*, Wismar, 1893) qui a réalisé l'une d'elles au moyen de 36 droites. Une construction, enfin, qui me paraît facile à retenir et qui ne demande que 29 droites a été indiquée par moi (*Nyt Tidsskrift for Matematik*, t. 7, 1896, p. 53). Mon article étant rédigé en danois, j'en donnerai un résumé ici.

Soient donnés les points 1, 2, ..., 6, A, B. J'établis d'abord le théorème suivant :

Le neuvième point commun aux cubiques passant par huit points donnés reste le même, si l'on remplace deux de ces points A *et* B *par deux points* O *et* P *situés sur une quelconque des cubiques passant par les points donnés et tels que les droites* AB *et* OP *concourent sur ladite courbe.*

Ceci démontré, il est évident que nous pouvons prendre arbitrairement l'un des points O ou P. Soit donc O le point commun aux droites 12 et 56; c^3 la cubique définie par O et par les huit points donnés; enfin T le troisième point d'intersection de c^3 et de AB. Alors P sera, en vertu du théorème cité, le troisième point commun à c^3 et à TO.

Supposons, pour le moment, que nous ayons construit P. Il sera alors facile de trouver le neuvième point commun aux cubiques qui passent par les huit points 1, 2, ..., 6, O, P. Car, une de ces

cubiques se décompose en la droite 12 et en la conique 34P56, une autre en 56 et en la conique 34P12. On aura donc le point demandé en construisant le quatrième point commun à deux coniques dont on connaît les trois autres et, de plus, deux points de chacune : construction qui se fait, comme on sait, à l'aide de la règle seulement.

Il nous reste à indiquer la manière de construire le point P. Regardons, à cet effet, c^3 comme engendrée par deux faisceaux homographiques, l'un de droites ayant O comme centre, l'autre de coniques ayant pour base A, B, 3 et un quatrième point X. Le point X sera, évidemment, le quatrième point commun aux coniques AB312 et AB356. Au rayon OT correspond la conique décomposée en les droites AB et 3X. Donc, le point P où OT rencontre c^3 pour la troisième fois doit se trouver sur 3X, qui, par suite, est un premier lieu du point P.

Si, au lieu de A, B, 3 on prenait A, B, 4 comme points de la base du faisceau de coniques, le quatrième point de la base serait le point Y déterminé par les coniques AB412 et AB456. En raisonnant comme plus haut, on voit que 4Y est un second lieu du point P, qui, par conséquent, est le point commun à 3X et 4Y.

La construction du neuvième point commun aux cubiques passant par les huit points donnés 1, 2, ..., 6, A, B peut donc s'indiquer ainsi :

Déterminer le quatrième point X *commun aux coniques* AB312 *et* AB356; *de même, le quatrième point* Y *commun aux coniques* AB412 *et* AB456. *Soit* P *le point de rencontre des droites* 3X *et* 4Y; *le point cherché sera le quatrième point commun aux coniques* 34P12 *et* 34P56.

Ajoutons qu'on obtient l'exécution la plus facile de la construction, trois fois employée, du quatrième point commun à deux coniques en appliquant le théorème connu :

Les coniques d'un faisceau coupent deux transversales, chacune passant par un point de la base du faisceau, suivant deux ponctuelles perspectives ayant leur centre de perspectivité sur la droite qui joint les deux points restants de la base.

T. Kierboe (Copenhague).

2172 (**1901**, 222; **1917**, 126) (N. J. Hatzidakis). — *Surfaces hélicoïdales.* — Dans un Mémoire de G. Pirondini (*N. A.*, **1902**, p. 289 à 311) on trouve, p. 307, une formule qui généralise pour les surfaces hélicoïdes le théorème de Clairaut relatif à une géodésique d'une surface de révolution. F. Balitrand.

4148 (**1912**, 271) (K. Thomas). — *Tables de* $\sin^2 \frac{x}{2}$. — Je rencontre une indication des plus utiles dans un paragraphe du Rapport du Conseil de la Société royale astronomique de Londres pour 1877 (t. 38, 1878 des *Monthly Notices* de ladite Société) dont j'ai donné la traduction, parue au journal *Les Mondes*, t. 45, 1er semestre, 1878.

Voici un résumé de leur description *loc. cit.*, p. 561-562.

Dès 1805, James Andrew avait publié un Ouvrage in-8° intitulé : *Astronomical and nautical tables, with Precepts*, qui renfermait une table donnant la valeur de $\sin^2 \frac{x}{2}$, depuis $x = 0°$ jusqu'à $x = 120°$, par intervalles de 10″ et avec sept colonnes de chiffres; mais l'Ouvrage en question semble n'avoir guère attiré l'attention, et il n'en est fait mention dans aucun des traités ordinaires de navigation. Un exemplaire de l'Ouvrage d'Andrew étant tombé par hasard entre les mains du major général Hannyngton, celui-ci améliora et rendit plus complète la disposition de cette table.

M. Hind en décida sur les deniers publics l'impression. La totalité de la table a été calculée de nouveau par le général Hannyngton, au moyen d'un procédé mécanique, avec combinaison de deux arithmomètres.

La table du général Hannyngton donne les logarithmes des sinus carrés pour chaque intervalle de 15″ de 0° à 180°, et les sinus carrés naturels pour chaque intervalle de 10″, de 0° à 180° avec sept chiffres décimaux, excepté dans le voisinage du commencement de la table, où les logarithmes sont donnés seulement avec cinq ou six chiffres.

La table occupe 137 pages *in-folio*. H. Brocard.

Note. — Au cours des quarante années écoulées depuis la publication du Rapport susmentionné, il est bien possible que de nouvelles éditions aient paru des tables de $\sin^2 \frac{x}{2}$. Je l'ignore, mais toute indication précise à ce sujet pourra s'obtenir sans doute aisément auprès de la Direction du *Nautical Almanac*. H. B.

4190 (**1913**, 75) (*A. Bar*). — *Origine du terme : Mécanique rationnelle* (**1914**, 10, 57, 166; **1915**, 182). — Dans le *Dictionnaire universel des Sciences, des Lettres et des Arts* de Bouillet (Paris, 1864), on lit à l'article *Mécanique :* « On la divise, d'après Newton, en mécanique rationnelle ou théorique, et en mécanique pratique ou appliquée ».

Newton serait donc le créateur du terme *mécanique rationnelle;* et si l'on a à sa disposition ses œuvres complètes, il doit être possible de trouver dans quel Ouvrage et à quelle date il l'a employé pour la première fois. F. Balitrand.

4312 (**1913**, 268) (*V.-G. Tariste*). — *Iatromathématique et biomécanique.* — Dans le *Dictionnaire universel des Lettres, des Sciences et des Arts* de Bouillet (Paris, 1864), on lit à l'article *Iatromathématiciens :* « Médecins qui cherchaient à rendre compte de tous les phénomènes de l'économie, dans l'état de santé comme dans l'état de maladie, par les principes de la mécanique, et qui expliquaient par des calculs mathématiques les lois d'après lesquelles les phénomènes ont lieu. Cette secte prit naissance en Italie vers le milieu du XVIIe siècle. »

On peut ajouter que parmi les fondateurs de cette école se trouvent Bellini (Laurent), 1643-1704, médecin et anatomiste, né à Florence, et Borelli (Jean-Alphonse), 1608-1679, médecin et physicien, né à Naples.

Ce dernier est l'auteur du traité *De motu animalium.* La réputation de cet Ouvrage était telle que Chirac, illustre médecin des XVIIe et XVIIIe siècles, laissa à sa mort, en 1732, une somme de 30000 livres à l'Université de Montpellier pour fonder deux chaires : une d'anatomie comparée; l'autre destinée à l'explication du traité de Borelli et des matières qui y ont rapport.

Il serait curieux de savoir ce qu'est devenue cette fondation et si les deux chaires existent toujours. F. Balitrand.

4435 (**1914**, 193) (J. de Vries). — *Théorèmes géométriques dont l'énoncé présente une certaine symétrie* (**1917**, 112). — A cette catégorie appartiennent les trois théorèmes suivants :

Si, dans un groupe de quatre droites, il y en a une qui est parallèle à la droite d'Euler du triangle formé par les trois autres, la même propriété a lieu pour chacune des droites.

Si, dans le quadrilatère complet formé par les quatre droites a, b, c, d, un des côtés a est parallèle à la droite qui joint un point P *donné sur l'axe* Δ *de la parabole inscrite à l'orthopôle de* Δ *par rapport au triangle bcd, la propriété analogue a lieu pour chacune des droites b, c, d.*

Si, dans le quadrilatère complet formé par les quatre droites a, b, c, d, un des côtés a est perpendiculaire à la droite qui joint le pied de la directrice de la parabole inscrite π *au point où la tangente au sommet de* π *rencontre la droite de*

Simson du triangle bcd qui lui est perpendiculaire, la propriété analogue a lieu pour les droites b, c, d.

R. Goormaghtigh.

4474 (**1915**, 53) (A. Gérardin). — *Système d'équations* (**1915**, 232; **1917**, 39). — *a*. Posant

$$x = a^2 + b^2,$$
$$x^{n-1} = \varphi_1^2 + \varphi_2^2,$$

on a les identités :

$$\overline{(a^2+b^2)}^n + 2[a\varphi_1 \pm b\varphi^2][b\varphi_1 \mp a\varphi_2] = \overline{[(a+b)\varphi_1 \pm (b-a)\varphi^2]}^2,$$
$$\overline{(a^2+b^2)}^n - 2[a\varphi_1 \pm b\varphi_2][b\varphi_1 \mp a\varphi_2] = \overline{[(a-b)\varphi_1 \pm (a+b)\varphi_2]}^2.$$

Les formules données par M. E. Fauquembergue sont des cas particuliers de celles-ci; en faisant par exemple

$$n = 3,$$

il vient

$$h = 2ab(a^2 - b^2 \pm 2b^2)(a^2 - b^2 \mp 2a^2)$$

et le signe inférieur donne les identités de M. Fauquembergue (*I. M.*, **1917**, p. 39).

Ces identités sont faciles ê établir en s'appuyant sur le théorème suivant :

Tout nombre h, congruent de l'ordre n est nécessairement de la forme

$$h = 2\theta^2\lambda\mu$$

où l'on a

$$\text{(E)} \qquad \theta^2(\lambda^2 + \mu^2) = x^n$$

et réciproquement.

Faisons par exemple $\theta = 1$, $n = 3$, $x = 5$, on tire $p = 44$, exemple donné par M. Gérardin.

Faisant encore $n = 4$, $\theta = \frac{1}{4}$, $x = \frac{5}{2}$, on a $h = 21$ congruent de l'ordre 4, donné par M. Gérardin.

b. Le congruent du second ordre est de la forme

$$h = x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2).$$

Cette formule donne par des hypothèses sur ses variables

$$h = 2(4f^4 - g^4),$$

$$h = f^4 - g^4,$$

(1) $$h = 4f^4 + g^4,$$

(2) $$h = 2(a^4 + b^4);$$

(1) et (2) ont été données par M. Gérardin (*I. M.*, **4472**, **1915**).

La solution initiale est $x = x_1^2 + x_2^2$.

c. La forme

$$h = 8ab(a^2 - b^2)(a^2 + 2ab - b^2)(a^2 - 2ab - b^2)$$

donnée par M. E. Fauquembergue (*I. M.*, **1917**, p. 39) est la forme générale du congruent du quatrième ordre.

d. La solution générale du problème **4473** revient toujours au problème

$$x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) = y_1 y_2 (y_1^2 - y_2^2),$$

dont une solution est donnée par M. Fauquembergue (*I. M.*, **1917**, p. 39). DESPUJOLS.

4616 (**1916**, 27) (A. AURIC). — *Calendrier grégorien.* — Dans le calendrier julien la fête de Pâques revient aux mêmes dates après une période de 532 ans;

$$532 = 4 \times 7 \times 19$$

est le produit des périodes des années bissextiles, des jours de la semaine et du cycle de Méton (voir *Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1917, p. 140).

Pour le calendrier grégorien dont la période pour les années bissextiles est de quatre siècles, au lieu de quatre ans, il semblerait, à première vue, que Pâques devrait revenir aux mêmes dates après une période de

$$4 \times 19 = 76 \text{ siècles},$$

car l'on sait que la période de quatre siècles du calendrier grégorien contient un nombre exact de semaines, en d'autres termes est divisible par 7.

En réalité, la période est beaucoup plus longue; car, en voulant corriger l'erreur du cycle de Méton, on a été amené à la porter à 57000 siècles (*voir* p. 126 et 129); mais, comme le fait remarquer M. Andoyer, ces considérations sont dénuées de toute valeur et de toute utilité puisque l'accord du calendrier avec le Soleil et la Lune ne peut se maintenir que pendant quelques milliers d'années.

Il peut y avoir coïncidence entre les calendriers julien et grégorien pendant un siècle (et même pendant deux siècles si l'année médiane est une année centenaire bissextile sur laquelle la réforme grégorienne n'a pas porté); c'est ce qui explique, en partie du moins, la coïncidence constatée dans les intervalles séparant les années spéciales : mais, pour répondre entièrement à la question, il serait nécessaire d'examiner une période grégorienne complète, et les réflexions qui précèdent démontrent suffisamment l'inutilité de cette recherche. A. Auric.

4771 (1917, 104) (H. Sebban). — *Détermination d'une suite* — Considérons la suite récurrente

$$v_0 = 2, \qquad v_1 = p, \qquad v_{i+2} = pv_{i+1} - qv_i.$$

D'après un théorème connu (Lucas, *Théorie des nombres*, p. 318), on aura

$$v_0 = v_0^2 - 2, \qquad v_2 = v_1^2 - 2q, \qquad v_4 = v_2^2 - 2q^2, \qquad \ldots,$$
$$v_{4n+2} = v_{2n+1}^2 - 2q^{n+1}.$$

Si l'on pose $q = -1$, on a donc

$$v_0 + v_2 + v_4 + \ldots + v_{4n+2} = \sum_0^{2n+1} v_i^2.$$

Soit encore $p = 1$; la loi de récurrence s'écrira

$$v_{i+2} = v_{i-1} + v_i,$$

et l'on aura

$$\sum_0^{2n+1} v_i^2 = \sum_1^{2n+1} v_i^2 + v_0^2 = \sum_1^{2n+1} v_i^2 + 4 = 2v_0 + \sum_1^{4n+1} v_i = 4 + \sum_1^{4n+1} v_i,$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^{2n+1} v_i^2 = \sum_1^{4n+1} v_i.$$

Dans la suite

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ \ldots.$$
$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 3, \qquad u_{i+2} = u_{i+1} + u_i,$$

la somme des carrés des $2n+1$ premiers termes est égale à la somme des $4n+1$ premiers termes.

La suite obtenue est la *deuxième suite de Fibonacci* dans laquelle

on a supprimé le premier terme (*voir* Lucas, *Théorie des nombres*, p. 311). La présente question est la reproduction de celle proposée par Lucas dans la *N. C. M.* de 1876 sous le n° 145 (*voir* aussi les *Problèmes* de M. Laisant, *Algèbre*, p. 40).

R. Goormaghtigh.

4818 (**1918**, 27) (M. Rignaux). — *Identité algébrique.* — Cette proposition est de J. Bertrand, ainsi qu'on peut le voir dans l'énoncé proposé dans l'*Algèbre élémentaire* de Neveu (Masson, éditeur).

J. Bouchary.

4824 (**1918**, 29) (A. Colucci). — *Solutions entières du système :*

$$(1) \qquad xy + zt = u^2, \qquad xz - yt = v^2.$$

(**1918**, 115). — On peut étudier ce problème à l'aide de méthodes assez nombreuses et conduisant toutes à des solutions plus ou moins élégantes.

1° Posons

$$x = p^2.x_0, \qquad y = q^2.y_0, \qquad z = q^2.z_0,$$
$$t = p^2.t_0, \qquad u = pq.a_0, \qquad v = pq.b_0,$$

dans le système (1); on aura une infinité de solutions avec une initiale x_0, y_0, z_0, t_0, a_0, b_0, les nombres p et q quelconques et premiers entre eux.

2° On trouve facilement :

$$(2) \quad \begin{cases} x = f^2 - g^2, & y = f^2 - 2fg - g^2, \qquad z = f^2 + 2fg - g^2, \\ t = 2fg, & u = v = f^2 + g^2. \end{cases}$$

Exemple :

$$f = 4, \qquad g = 1; \qquad x = 15, \qquad y = 7,$$
$$z = 23, \qquad t = 8, \qquad u = v = 17.$$

Ces identités donnent une solution générale de 4806 (**1918**, 6, 113) en prenant pour f et g la valeur générale des cathètes de triangles rectangles.

Exemple :

$$f = 4, \qquad g = 3; \qquad x = 7, \qquad y = -17,$$
$$t = 24, \qquad z = 31, \qquad u = v = 5^2.$$

3° Posons $t = 1$ dans (1), ainsi que

$$y = x \mp 2h, \qquad z = h^2, \qquad u = x \pm h;$$

d'où

$$(3) \qquad x(h^2-1) \mp 2h = v^2.$$

Pour $h = 2$, on aura

$$x = 3m^2 \pm 4m;$$

d'où la solution générale homogène :

$$(4) \quad \begin{cases} x = 3f^2 \pm 4fg, \quad y = 3f^2 \pm 4fg - 4g^2, \quad z = 4g^2, \\ t = g^2, \quad u = \frac{1}{2}(x+y) = 3f^2 + 4fg - 2g^2, \quad v = 3fg + 2g^2. \end{cases}$$

Exemple :

$$f = 3, \quad g = 1; \quad x = 15, \quad y = 11,$$
$$z = 4, \quad t = 1, \quad u = 13, \quad v = 7,$$

4° h est forcément pair dans (3); on aura donc d'autres solutions générales pour de nouvelles valeurs de h.

Ainsi, pour $h = 8$

$$(5) \quad \begin{cases} x = 63f^2 \pm 8fg, & z = 64g^2. \\ y = 63f^2 \pm 8fg - 16g^2, & t = g^2, \\ u = \frac{1}{2}(x+y) = 63f^2 \pm 8fg - 8g^2, & v = 4g^2 \pm 63fg. \end{cases}$$

Exemple :

$$f = 1, \quad g = 1; \quad x = 55, \quad y = 39,$$
$$z = 64, \quad t = 1; \quad u = 47, \quad v = 59.$$

A. Gérardin.

En élevant au carré et en ajoutant, il vient

$$(x^2 + t^3)(y^2 + z^2) = u^4 + v^4,$$
$$(x + it)(x - it)(y + iz)(y - iz) = (u^2 + iv^2)(i^2 - iv^2).$$

Il en résulte immédiatement qu'il suffira d'avoir une décomposition de $u^2 + iv^2$ en deux facteurs

$$u^2 + iv^2 = (x + it)(y + iz)$$

pour avoir une solution du système proposé.

Ce procédé de calcul semble s'appliquer à la question 4806.

A. Auric.

4830 (**1918**, 31) (H. Sebban). — *Sur diverses fonctions arithmétiques* (**1918**, 139). — A la fonction $\varphi(n)$, qui indique combien il y a de nombres premiers à n, se rattache une remarquable formule, donnée en 1876 par H.-J.-S. Smith

$$f(n) = \varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\ldots\varphi(n).$$

C'est en cherchant et en parvenant à la démontrer que M. P. Mansion en a tiré de nouvelles et importantes généralisations, exposées dans son article du tome 2 des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1878, p. 211-224.

On a aussi, pour la somme $\sigma(n)$ des $\varphi(n)$ nombres premiers et inférieurs à n, la formule

$$\sigma(n) = \frac{1}{2} n\varphi(n),$$

donnée par M. E. Catalan. H. Brocard.

4840 (**1918**, 50) (T. Ono). — *Polaires trilinéaires* (**1918**, 143). — J'ignore si le résultat est connu sous la forme énoncée, mais je fais remarquer qu'il est le transformé homographique de propriétés classiques, savoir :

Dans tout triangle :

1° La polaire trilinéaire Δ de l'orthocentre H est l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des 9 points.

2° La polaire trilinéaire du centre de gravité G est la droite de l'infini.

3° Le centre ω du cercle des 9 points est sur GH, ainsi que le centre du cercle circonscrit.

Les polaires de G et H par rapport à (ω) sont donc parallèles à Δ.

Il est visible que le cercle de l'énoncé de M. T. Ono peut être remplacé par une conique quelconque. Boulloud.

4845 (**1918**, 74) (H. Brocard). — *Série la plus rapidement convergente pour le calcul du nombre* π ? — Parmi les séries provenant du développement de arc tang x, il n'y a pas de bornes à la rapidité de convergence, on va le voir, mais la commodité d'emploi diminue dans ce cas.

Pour mémoire, il y a le développement tel quel d'arc tang x en série entière. Dans son *Introduction à l'Analyse*, Euler (traduction française Labey, 1er volume, p. 105), qui donne π avec plus de 120 décimales, dit — après avoir fait remonter à Leibniz la découverte de la série arc tang 1 ou $\frac{\pi}{4}$ — que c'est par le développe-

ment de arc tang $\frac{1}{\sqrt{3}}$, donnant $\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$ sous la forme

$$(S) \qquad 1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3^2.5} - \frac{1}{3^3.7} + \ldots,$$

que furent effectués, à l'époque, les premiers calculs de π en approximation illimitée que, seules, les séries rendirent praticables.

Cette série (S), plus convergente déjà et plus simple que arc sin $\frac{1}{2}$ donnant $\frac{\pi}{6}$, est pourtant surannée, même pour Euler, qui donne

$$(1) \qquad \text{arc tang}\,\frac{1}{2} + \text{arc tang}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Celle-ci n'est qu'une des solutions commensurables, en nombre illimité, de l'équation indéterminée

$$(2) \qquad \frac{\text{tang}(m \text{ arc tang}\, y) \pm x}{1 \mp x \text{ tang}(m \text{ arc tang}\, y)} = 1,$$

m étant un entier arbitraire, et x et y des nombres fractionnaires.

Comme plus convergente, on trouve déjà, notamment, dans la *Géométrie* de Legendre, la solution

$$(3) \qquad 4 \text{ arc tang}\,\frac{1}{5} - \text{arc tang}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Or les séries (1) peuvent égaler celles-ci en convergence, par un changement de variable (*voir* Frenet, Gauthier-Villars, 7e édition, p. 106), tel qu'on obtienne

$$\text{arc sin}\, u = \text{arc tang}\, t,$$

c'est-à-dire en posant

$$(4) \qquad u = \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

On connaît d'autre part (*voir* les Traités d'Analyse), le développement par la formule de Taylor de $(\text{arc sin}\, u)^2$. Différentiant ce développpement,

$$\frac{\text{arc sin}\, u}{\sqrt{1-u^2}} = u + \frac{2}{3}u^3 + \ldots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{2.5\ldots(2n-1)}u^{2n-1} + \ldots \qquad (\text{mod}\,|u| < 1).$$

Le changement de variable (4), donne

$$(5) \quad \text{arc tang}\, t = \frac{t}{1+t^2}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2.4}{3.5}\,\frac{t^2}{(1+t^2)^2} + \ldots\right],$$

ce qui, appliqué à la relation (1), donne

$$(6)\quad \frac{\pi}{4} = \frac{4}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{2}{10} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \ldots\right]$$
$$+ \frac{3}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{10} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots\right].$$

L'investigation s'arrête généralement là. Néanmoins, je l'ai dit, les solutions de l'équation (2), où y peut être pris arbitrairement égal à $\frac{1}{10^p}$, p étant aussi arbitraire, peuvent donner des arc tang en série aussi convergente qu'on le veut, mais avec des valeurs numériques *peu simples pour* x. Ainsi je trouve, en calculant les tangentes des arcs $[m(\text{arc tang}\, y)]$,

$$(7)\qquad \frac{\pi}{4} = 8 \text{ arc tang}\,\frac{1}{10} - \text{arc tang}\,\frac{1.758.719}{147.153.121},$$

et la dernière tangente est inférieure à $\frac{1}{83}$.

J'obtiendrais encore une *convergence extrême*, en associant le calcul de π à celui d'un logarithme népérien. En appelant arg. th x l'argument dont la tangente hyperbolique est x, on a évidemment

$$(8)\qquad \text{arc tang}\, x + \text{arg. th}\, x = 2\left(x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \ldots\right).$$

Or

$$\text{arg. th}\, x = \frac{1}{2}\,\text{L}\,\frac{1+x}{1-x},$$

puisque

$$(\text{th}\, x)' = 1 - \text{th}^2 x,$$

et que

$$(\text{arg. th}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Cette formule de haute convergence (8) nous associe [1], au calcul de π: si $x = \frac{1}{2}$, le calcul de L3; si $x = 3$, le calcul de L2; si $x = \frac{1}{5}$, le calcul de L$\frac{3}{2}$; si $x = \frac{1}{239}$, le calcul de L$\frac{120}{119}$. On peut encore l'écrire

$$(8')\qquad \text{arc tang}\, x = 2\left(x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\,\text{L}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Je ne l'ai vue nulle part. H. de Montille.

---

[1] On sait qu'on a aussi, pour le calcul des logarithmes népériens, des formules d'une convergence extrême (*voir* par exemple, l'*Algèbre* de Briot).

On peut construire des séries aussi rapidement convergentes que l'on désire, mais le nombre de termes dans la formule augmente dans l'opération. Il suffit d'appliquer l'identité suivante à la série de Machin, et successivement aux séries, que l'on obtient.

Par exemple, l'identité [1] donne

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{q} = 2\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{2q} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{4q^3+3q};$$

d'où

$$\frac{\pi}{4} = 64\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{80} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{239} - 4\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{515}$$
$$- 8\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{4030} - 16\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{32060} - 32\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{256120}.$$

Grâce à cette formule on peut calculer la valeur de π exacte à 5 décimales avec seulement les premiers termes de chaque élément de la formule.

D'autres formules sont indiquées dans *I. M.* (t. 2, 1895, p. 244-247; et t. 3, 1896, p. 276).

Il y a beaucoup de méthodes pour décomposer un arc tangente en la somme ou la différence de deux autres arc tang, plus ou moins rapidement convergentes. On peut employer les séries récurrentes suivantes. Soient les séries :

u.....	1	2	5	12	29	70	169	...
v.....	1	3	7	17	41	99	239	...

d'échelles

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}, \qquad v_n = 2v_{n-1} + v_{n-2},$$

où

$$v_n \pm u_n = u_{n+1} \quad \text{ou} \quad u_{n-1}.$$

Nous aurons

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{u_{2n}} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{v_{2n}} = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{v_{2n+1}},$$
$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{u_{2n}} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{v_{2n}} = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{v_{2n-1}}.$$

Par exemple,

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{70} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{99} = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{239},$$
$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{70} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{99} = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{41}.$$

M. Cashmore.

---

[1] Déjà publiée dans *Papers of the Association for the Advancement of Science; South Africa*, 1905.

Une formule rapidement convergente et souvent employée pour le calcul de π, est celle de Machin

$$\pi = \frac{16}{5}\left(1 - \frac{4}{3.100} + \frac{4^2}{5.100^2} - \frac{4^3}{7.100^3} + \ldots\right)$$
$$- \frac{4}{239}\left(1 - \frac{1}{3.57121} + \frac{1}{5.57121^2} - \frac{1}{7.57121^3} + \ldots\right).$$

C'est cette formule qui a servi à W. Shanks à calculer π avec 530 chiffres décimaux (E. Cesàro, *Corso di Analisi algebrica*, p. 272). F. Balitrand.

4846 (**1918**, 74) (H. Brocard). — *Démonstrations du théorème de Pythagore.* — Deux Ouvrages publiés l'un par J. Hoffmann à Mayence en 1821, l'autre par J. Wipper à Leipzig en 1880 contenaient respectivement 32 et 46 démonstrations. L'Ouvrage le plus complet actuellement est celui de J. Versluÿs, qui en a réuni 96 : *Zes-en-negentig bewÿren voor het theorema van Pythagoras* (Amsterdam, 1914). Depuis la publication de ce Livre, d'autres démonstrations ont encore paru : Gutheil (*Hoffmanns Zeits.*, 1914); J. Vollgraff (*Wiskundig Tydschrift*, 1916-1917, p. 51); W. et J. Stuven (*Ibid*, p. 209). R. Goormaghtigh.

4851 (**1918**, 77) (L. Ropion). — *Millésimes à propriétés spéciales dans le calendrier.* — Même en se bornant à l'intervalle des époques extrêmes indiquées, il y a plus de solutions que les cinq énoncées.

Je trouve en plus les années juliennes 9 (lettre dominicale F), 66 (lettre E), 99 (lettre F de nouveau), et grégorienne 8888 (lettres DC). Il y a donc *neuf* solutions en tout. On va voir dans ce qui suit qu'il ne peut y en avoir d'autres.

Ce nombre de solutions, quelle que soit la suite de siècles envisagée, reste assez élevé. Et il y a lieu de signaler d'abord le fait suivant : *Quelle que soit l'année, bissextile ou non, les dates* 4/4, 6/6, 8/8, 10/10 et 12/12 [1] (notation usuelle), *tombent le même jour de la semaine : il en est de même pour les dates* 3/3, 5/5 *et* 7/7. Les chances de satisfaire à l'énoncé en semblent donc accrues.

Déjà la remarque précédente condense un peu cette recherche.

---

[1] Les calendriers étant indépendants de la base du système de numération, les valeurs 10 et 12 pour n ne sont pas à rejeter entièrement, et correspondent au même problème avec une base a de numération plus grande. Si $a = 12$, les millésimes duodécimaux 11 et 33 (décimalement écrits 13 et 39), par exemple, satisfont à l'énoncé.

Affectons, de plus, à chaque jour de la semaine, un numéro d'ordre hebdomadaire (1 dimanche, 2 lundi, ..., 7 samedi), et un nombre aussi à chaque lettre dominicale (A = 1, B = 2, ..., G = 7) : appelons celui-ci L. On voit aisément que les numéros hebdomadaires correspondant aux diverses dates sont : 9-L pour 1/1; 6-L pour 2/2. (On prendra d'ailleurs pour L la lettre de la portion d'année correspondante, si l'année est bissextile, c'est-à-dire à 2 lettres.) 7-L à la fois pour 3/3, 5/5 et 7/7; 11-L à la fois pour 4/4, 6/6, 8/8, 10/10, 12/12; etc.

D'où l'on conclut, pour chaque chiffre significatif, *la seule lettre dominicale acceptable pour la portion d'année qui s'y rapporte :* ainsi, pour le chiffre 6 (numéro de mois), 11 — L = 6, L ne peut être que 5, et seule la cinquième lettre E devra être dominicale, au moins dans la dernière partie de l'année, si celle-ci est à 2 lettres (bissextile).

On se reportera alors à un de ces tableaux des lettres des années que donnent chaque Annuaire du Bureau des Longitudes et chaque Almanach.

Si l'on veut s'en passer, il existe une double formule, qui donne, pour chaque année, soit la lettre λ julienne, soit la lettre l grégorienne, en appelant $E\left(\frac{m}{n}\right)$ la partie entière de $\frac{m}{n}$,

$$(1) \qquad \lambda \equiv \left[3 - m - E\left(\frac{m}{4}\right)\right] \qquad (\text{module } 7),$$

m étant le nombre entier du millésime; et, en posant $m = 100\,c + u$, c étant le nombre entier de siècles,

$$(1') \qquad \lambda \equiv \left[c + 3 - u - E\left(\frac{u}{4}\right)\right] \qquad (\text{mod. } 7),$$

$$(2) \qquad l \equiv \left[2c + 1 - E\left(\frac{c}{4}\right) - u - E\left(\frac{u}{4}\right)\right] \qquad (\text{mod. } 7).$$

Ces formules, dont le type est donné par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1917, permettent, soit de calculer le tableau des lettres dominicales, pour le nombre restreint des millésimes très spéciaux indiqués [pour 4 chiffres, on fera $c = u$ dans (1') et (2)], soit de reprendre la discussion, avec l'hypothèse faite sur c et u. On peut alors étendre le problème au delà de l'an 10000, ou bien aux années négatives juliennes. H. DE MONTILLE.

Années spéciales des cent premiers siècles. — Le problème, tel qu'il est posé, est incomplet. Contrairement à ce qui est dit, il existe, dans ce laps de temps, d'autres années possédant les mêmes

caractéristiques : les années juliennes 66, 99 et l'année grégorienne 8888.

La formule demandée est la même que celle qui a servi à M. G. Desmarets à établir son *Calendrier perpétuel* (*cf.*, par exemple, *Almanach Hachette*, 1918, p. 238).

Je me propose, après la guerre, de publier, dans le *Central Office Mathematic*, une étude détaillée sur les divers calendriers qui ne saurait trouver place ici et qui répondra sans doute entièrement à la question posée.

N.-B. — Je serais heureux de savoir comment l'auteur de la question est parvenu aux résultats qu'il a publiés.

H. Sebban.

4854 (**1918**, 79) (Prompt). — *Division de* 1918 *en carrés.* — Il est impossible d'écrire le nombre 1918 sous la forme d'une somme de 16 carrés tous différents et inférieurs à 361. D'autre part, si l'on considère les décompositions en 16 carrés, tous plus petits que 361, et dont un seul est répété deux fois, il y a 13 solutions. En dehors des 5 décompositions indiquées par M. Prompt, *toutes* les solutions du problème sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
1918 &= 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 12^2 \\
&\quad + 13^3 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2, \\
&= 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 \\
&\quad + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2, \\
&= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 12^2 \\
&\quad + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2, \\
&= 1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 \\
&\quad + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2, \\
&= 1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 11^2 + 12^2 \\
&\quad + 13^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 17^2 + 18^2, \\
&= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 12^2 \\
&\quad + 13^2 + 13^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2, \\
&= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 \\
&\quad + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 15^2 + 17^2 + 18^2, \\
&= 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 \\
&\quad + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 16^2 + 18^2 + 18^2.
\end{aligned}$$

Dans la quatrième décomposition indiquée dans l'énoncé (**1918**, 79), il faut supprimer le carré 4. R. Goormaghtigh.

M. Corey veut bien m'écrire qu'il a pu faire plusieurs nouvelles décompositions du nombre 1918 en 16 carrés, avec les conditions

qu'il avait trouvées d'abord, c'est-à-dire avec des carrés qui sont tous inférieurs à 361, et parmi lesquels il y en a un qui est redoublé; les voici : je les indique en mettant dans une parenthèse le carré redoublé, et dans la parenthèse suivante les trois carrés inférieurs à 361 qui ne sont pas employés :

$$\begin{aligned}
&[(18)-(4,\ 12,\ 16)]-[(18)-(1,\ 15,\ 17)]\\
-&[(13)-(2,\ 10,\ 16)]-[(13)-(8,\ 10,\ 14)]\\
-&[(11)-(3,\ 12,\ 13)]-[(11)-(4,\ 10,\ 14)]\\
-&[(10)-(1,\ 11,\ 13)]-[(\ 6)-(3,\ \ 7,\ 13)]\\
-&[(\ 6)-(5,\ \ 9,\ 11)]-[(\ 3)-(6,\ \ 8,\ 10)]\\
-&[(\ 2)-(5,\ \ 7,\ 11)]-[(\ 2)-(1,\ \ 5,\ 13)].
\end{aligned}$$

J'incline à croire que le nombre de ces décompositions est plus grand encore. Quant aux autres demandes que j'ai posées, elles demeurent intactes. PROMPT.

4855 (**1918**, 80) (R. DESPUJOLS). — *Nombres parfaits impairs.* — Ce théorème énoncé par Lionnet (*N. A.*, 1879, p. 306) a été démontré par Ed. Lucas dans sa *Théorie des Nombres*, t. 1, p. 425. Lucas a aussi déduit de la démonstration la proposition suivante : *il n'existe aucun nombre parfait impair de forme* $4q+3$.

R. GOORMAGHTIGH.

Réponse analogue de M. M. RIGNAUX.

Cet énoncé est réellement démontré : c'est une vérité qui a été rencontrée par plusieurs, à différentes époques. L'affirmation de Lionnet, dans les *Nouvelles Annales* de 1879, p. 306, a le plus d'ancienneté relative.

Peu après, Edouard Lucas, dans sa *Théorie des Nombres*, démontre formellement ce théorème. Enfin C. Bourlet, en 1896, dans les *Nouvelles Annales*, établit (p. 307) la même propriété : il cite Lionnet et Lucas. Dans l'interprétation de l'énoncé, $4n+1$ est évidemment au moins 5, mais la condition $k \neq 0$ ne semble pas impérative. J'ajouterai, on peut le déduire aussi de l'article de Bourlet, *que i ne peut avoir moins de trois facteurs premiers distincts, et que $i > 195$.* H. DE MONTILLE.

Extrait d'une réponse de M. H. BROCARD, qui renvoie aux mêmes auteurs :

Voir les réponses 208 (**1894**, 102); **1895**, 52; **1899**, 108.

C. Bourlet est parvenu aussi à d'autres propriétés des nombres parfaits impairs, s'il en existe, mais, jusqu'à présent on n'a pas réussi à en obtenir. On sait seulement (*loc. cit.*, p. 311) que tout

nombre parfait impair est certainement plus grand que le nombre $5 \times 3^2 \times 13^2 \times 17^2 = 2\,197\,845$. H. Brocard.

4856 (**1918**, 97) (H.-B. Mathieu). — *Équation de Fermat.* — L'équation donnée

$$1 + mx^2 = y^2$$

ou mieux

$$y^2 - mx^2 = 1$$

bien connue depuis Fermat, est toujours résoluble pour m positif, entier et non carré (Dirichlet, *voir Encycl. Molk*, *Théorie des nombres*, p. 292).

La première solution en a été donnée par Lagrange au moyen des réduites de $\sqrt{m}$.

Ce sujet a été d'ailleurs, ici même, déjà traité ou développé.

Voir aussi *Œuvres de Fermat*, t. 2, p. 334, 377, 405, 433; t. 3, p. 312, 417, et t. 4, note XVIII.

Au point de vue bibliographique, c'est l'équation désignée à tort sous le nom de Pell tandis qu'en réalité elle appartient à Fermat, comme l'avait remarqué A. Marre (*C. R.*, t. 88, 13 janvier et 3 février 1879) dans une étude demeurée longtemps inaperçue, et cela bien avant celle de H. Konnen, *Geschichte der Gleichung* $t^2 - Du^2 = 1$ (Leipzig, 1901), établissant la priorité en faveur de Fermat. H. Brocard.

Cette équation est possible pour toute valeur de m positive, non carrée.

Legendre a donné dans sa *Théorie des nombres*, tome I, une table des plus petites valeurs de x et y (autres que $x = 0$, $y = 1$), pour $m \leqq 1003$.

Cette solution permet de résoudre complètement l'équation, car on a la propriété suivante :

(x_0, y_0), étant la plus petite solution de l'équation $1 + mx^2 = y^2$, cette dernière est complètement résolue par les suites récurrentes :

$$x = 0,\ x_0,\ \ldots,$$
$$y = 1,\ y_0,\ \ldots,$$

dont la loi commune est

$$T_{n+1} = 2y_0 T_n - T_{n-1}.$$

M. Rignaux.

Autres réponses de MM. Boutin, Colucci et H. Sebban.

4858 (**1918**, 97) (Prompt). — *Démontrer à l'aide de la Table de Pythagore, la relation*

$$(S_1)^2 = S_3.$$

Cette démonstration se trouve dans le tome 2 des *Exercices*

d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie de P. Aubert et G. Papelier, 2e édition, page 21. M. Rignaux.

La propriété des nombres en équerre, d'avoir pour somme un cube, ne saurait passer pour nouvelle. En lisant l'énoncé, j'ai eu de suite le souvenir d'un diagramme d'Ed. Lucas. *Voir* en effet (*N. A.*, 1870, p. 49-53) *Note sur les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers.* Mais je n'ai pas été surpris de rencontrer cette même remarque dans le livre de M. D. Marchand : *La Science des Nombres*, 1877, p. 145-147 : *La Table de Pythagore et les cubes.*

Quant à la somme de ces nombres de 1 à n^3, égale à $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ou au carré du triangulaire ayant n pour base, cette relation est parfaitement spécifiée, *ibid.* p. 126.

Ces diverses propositions n'ont certainement pas échappé à la curiosité de bien d'autres arithmologues. Elles se présentent immédiatement à tout chercheur un peu attentif.

Les remarques de l'énoncé appartiennent donc au moins à Ed. Lucas, mais il se pourrait aussi bien qu'elles fussent beaucoup plus anciennes. M. P. Mansion n'hésite pas à les attribuer à Pythagore (*Mathesis*, 1901, p. 70).

Voir à ce sujet les *Récréations mathématiques* de W. Rouse Ball, 3e Partie, 1909. Arithmétique et Algèbre, par M. A. Aubry, p. 143-146.

Je ne puis dire si des Ouvrages d'enseignement classique ont déjà exploré la Table de Pythagore, mais il est certain que ce point de vue aurait été adopté par Ed. Lucas. Il n'a pas manqué de l'être aussi par M. Laisant dans ses Ouvrages de 1906 et 1910 : *Initiation mathématique*, p. 80-83 et l'*Enseignement du Calcul*, p. 18-21 et p. 32. Au surplus, et sans tracer de quadrillage, il lui a suffi d'observer les identités que voici :

$$\begin{array}{ccccc} & & & 5 & \\ & & & 2.5 & \\ & & & 3.5 & \\ & & & 4.5 & \\ 5 & 2.5 & 3.5 & 4.5 & 5.5 \end{array} \quad \begin{array}{c} 5\ 5\ 5\ 5\ 5 \\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5 \\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5 \\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5 \\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5 \end{array} = 5 \times 5^2 = 5^3.$$

H. Brocard.

4859 (**1918**, 98) (H.-B. Mathieu). — *Propriété du nombre* 343 *ou* 7^3. — Ce nombre est le seul qui, ajouté à ses parties aliquotes, donne pour somme un carré ($400 = 20^2$).

C'est la question à laquelle se ramène celle de résoudre l'équation

$$t^5 + t^4 + t^3 + t^2 = u^2,$$

n° 53, *N. C.*, t. 1, 1875; comme l'ont observé E. Lucas et Catalan (*N. C.*, t. 2, 1876, p. 87-88).

E. Lucas (*ibid.*) a rappelé que l'équation transformée

$$(1) \qquad x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$$

ou

$$(2) \qquad (1 + x)(1 + x^2) = y^2$$

correspond à un problème proposé par Fermat dans sa lettre à Digby du 20 juin 1657 (*Varia opera mathematica*).

E. Lucas ajoute : on a

$$(3) \qquad 1 + x = 2u^2, \quad 1 + x^2 = 2v^2, \quad y = 2uv.$$

La solution complète est donnée par la série des solutions de l'équation

$$x^2 - 2v^2 = -1$$

maintes fois traitée.

La question de résoudre en nombres entiers et positifs l'équation (1) ayant été proposée sous le n° 1177 (*N. A.*, 1875, p. 288), Gerono publia au volume de 1877 (p. 230-234) un intéressant article ayant pour objet de démontrer qu'elle n'admettait pas d'autres solutions entières et positives que les valeurs $x = 1$ et 7, d'où $y = 3$ et 20.

Après les indications publiées en 1876 et en 1877, il est curieux que la même question n° 1177 ait été reproposée sous le n° 1476, par Lionnet (*N. A.*, 1883, p. 479).

Dans la réponse (*N. A.*, 1884, p. 538), M. E. Fauquembergue, après avoir rappelé la solution de Gerono, a ramené l'équation (1) aux formes ci-dessus (2) et (3), au sujet desquelles A. Genocchi venait de publier (*N. A.*, 1883, p. 306-310) une démonstration très simple.

Dans le même temps, T. Pepin avait aussi étudié la même proposition (*Atti di N. Lincei*, t. 36, 1883, p. 23-33) comme cela est indiqué au t. 4 des Œuvres de Fermat (note XXIII, p. 220 : Un théorème sur le nombre 7). *Voir* aussi le t. 2, p. 434.

Note. — Les deux équations bien connues

$$x^2 - 2y^2 = 1, \qquad x^2 - 2y^2 = -1$$

ont fait ici l'objet de quelques références bibliographiques, à l'occasion, notamment, des questions 4218 (**1913**, 121) **1913**, 254; **1915**, 37; et 4444 (**1914**, 196) **1915**, 139, 185.

Elles semblent vouées à une fréquente réédition.

H. Brocard.

4860 (**1918**, 98) (A. Colucci). — *Lieu géométrique.* — Par le sommet A d'un triangle ABC on mène une droite variable qui coupe BC en P; soient B′ et C′ les projections de B et C sur AP; on demande le lieu du conjugué harmonique M de P par rapport à B′ et C′. Les rapports MB′ : MC′, PB′ : PC′ et BB′ : CC′ étant égaux, les triangles BMB′ et CMC′ sont semblables et les angles BMA, AMC sont égaux. La recherche proposée se rattache donc au problème bien connu qui conduit aux focales de Van Rees, lieu des points d'où l'on voit deux segments rectilignes sous des angles égaux (*voir* Teixeira, *Traité des courbes spéciales*, t. 1, p. 55). Le cas de la présente question est celui où les deux segments ont une extrémité commune A; le lieu demandé est donc une *strophoïde oblique* ayant A pour point double et tangente en ce point aux bissectrices de l'angle A (*voir* P.-H. Schoute, *J. de Crelle*, 1885, p. 98-109).

Lorsque l'angle A est droit, la courbe devient une strophoïde droite. Enfin quand AB = AC, le lieu proprement dit est le cercle ABC.

R. Goormaghtigh.

Soient B′, C′, les projections des sommets B et C d'un triangle ABC sur une droite variable r qui passe constamment par A. — Quel est le lieu du conjugué harmonique du point (r, Bc) par rapport à B′ et C′? — Le point cherché ne peut être à l'infini que dans les deux cas suivants :

1° Si B′ ou C′ est à l'infini : r est alors isotrope;

2° Si (r, BC) est le milieu de B′C′ : r est alors, soit la médiane issue de A, soit la hauteur; mais il est facile de constater que celle-ci fait entièrement partie du lieu.

La courbe passe par B et C; sur toute droite r elle n'a qu'un seul point autre que A.

Donc :

Le lieu cherché est une cubique circulaire ayant un nœud en A, passant par B et C, et dont l'asymptote réelle est parallèle à la médiane issue de A.

La hauteur issue de A fait, en outre, partie du lieu.

P. Hendlé.

Autre réponse de M. P. Poulet qui paraîtra ultérieurement.

4863 (**1918**, 100) (H. Brocard). — *Propriétés des axes d'une suite de paraboles.* — Les directions des axes de deux paraboles consécutives considérées P_1, P_2 jouissent d'une propriété intéressante :

L'axe de P_1 *faisant avec les côtés de* F_1 *des angles* θ_1, θ_2, θ_3, θ_4

et avec l'axe de P_2 *l'angle* α, *on a*

$$\operatorname{tang}\alpha + \cot\theta_1 + \cot\theta_2 + \cot\theta_3 + \cot\theta_4 = 0.$$

On en déduit, par une construction simple, la direction de l'axe de P_2 connaissant celle de l'axe de P_1.

Dans le cas où les points de contact de P_1 *avec les côtés de* F_1 *forment un quadrilatère inscriptible dans un cercle* C, *les axes de* P_1 *et* P_2 *sont parallèles.*

Dans ce cas spécial, l'axe de P_2 s'obtient d'ailleurs facilement d'après la propriété suivante :

Le centre du cercle C *divise la distance des axes de* P_1 *et* P_2 *intérieurement dans le rapport de* 1 *à* 3.

R. Goormaghtigh.

4867 (**1918**, 101) (H. de Montille). — *Expression de* $\sum_{j=1}^{j=n} C_n^j$. — Les indications bibliographiques sommaires visées dans l'énoncé doivent désigner les notes de M. E. Collignon (*A. F.*, Oran, 1888, p. 4-24) et de M. H. Delannoy (*A. F.*, Limoges, 1890, p. 35-37).

Cependant je rencontre un article de Catalan (*M. A. B.*, t. 48, 1889), *Nouvelles notes d'Algèbre et d'Analyse*, au cours duquel se trouve rapportée (p. 37) une formule de Poisson, qui s'applique au problème proposé, car elle revient à dire que la somme

$$1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^p$$

est représentée par l'intégrale définie

$$2^m(p+1)\,C_m^{p+1}\int_0^1 \frac{u^{m-p-1}}{(1+u)^{m+1}}\,du.$$

Cette formule méritait d'être rappelée, ne serait-ce qu'à titre de première réponse.

Note. — La somme alternée des coefficients du binome a été fréquemment signalée et se trouve immédiatement. *Voir* E. Catalan (*loc. cit.*) ainsi que divers articles de Genocchi.

Il en est de même de la somme des carrés des coefficients du binome (D. André, *N. A.*, 1871, p. 223). H. Brocard.

4868 (**1918**, 102) (F. Balitrand). — *Courbes en coordonnées multipolaires.* — Prenons comme axes des x et des y la tangente et la normale au point M de la courbe donnée $f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0$,

et soit θ_i l'angle de la tangente avec le rayon vecteur MA_i; si l'on dérive l'équation par rapport à l'arc s, on a, en observant que la dérivée de r_i par rapport à s est égale à $\cos\theta_i$,

$$(1) \qquad \sum_1^n \cos\theta_i \frac{df}{dr_i} = 0.$$

Or, les abscisses des points A_i étant $r_i \cos\theta_i$, on voit que le numérateur de l'expression de l'abscisse du centre des distances proportionnelles des points A_i affectés de coefficients $\frac{1}{r_i}\frac{df}{dr_i}$ est égale au premier membre de (1); cette abscisse est donc nulle, ce qui démontre le théorème. R. Goormaghtigh.

Les trois constructions indiquées dans l'énoncé se ramènent immédiatement à une seule lorsqu'on se rappelle ce théorème bien connu, et même, peut-on dire, classique de Leibniz :

Si, sur les vecteurs $F_1, F_2, \ldots, F_n$, *issus du point* M, *on prend respectivement des points quelconques* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *le centre de gravité des masses* $\frac{F_1}{MA_1}, \frac{F_2}{MA_2}, \ldots, \frac{F_n}{MA_n}$, *appliquées en ces points, se trouve sur la résultante des vecteurs* $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

A cette occasion, nous rappellerons le théorème beaucoup plus général que nous avons énoncé pour la première fois dans les *C. R.* (1889, 2e sem., p. 959), démontré dans les *N. A.* (1890, p. 289, et 1894, p. 501) et reproduit dans notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (t. I, p. 362) :

Si $AB_1 = l_1$, $AB_2 = l_2, \ldots, AB_n = l_n$ *sont les distances sous des angles constants, d'ailleurs quelconques,* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *du point* A *aux courbes* $(B_1), (B_2), \ldots, (B_n)$, *liées par la relation*

$$F(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0,$$

et que l'on porte sur ces distances les segments $AD_1, AD_2, \ldots, AD_n$ *proportionnels à* $\frac{\partial F}{\partial l_1}, \frac{\partial F}{\partial l_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial l_n}$, *si enfin les perpendiculaires élevées à ces segments en* $D_1, D_2, \ldots, D_n$ *coupent en* $d_1, d_2, \ldots, d_n$ *les droites qui joignent le point* A *aux centres de courbure* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *répondant, pour les courbes* $(B_1), (B_2), \ldots, (B_n)$ *aux points* $B_1, B_2, \ldots, B_n$, *la normale à la courbe* (A), *décrite par le point* A, *en vertu de la relation donnée, est dirigée suivant le vecteur résultant des vecteurs* $Ad_1, Ad_2, \ldots, Ad_n$.

M. d'Ocagne.

L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS.

Nos 1-2. *SUPPLÉMENT.* JANVIER 1919.

BIBLIOGRAPHIE.

En raison de l'intérêt particulier porté par beaucoup de nos lecteurs à la théorie des nombres, nous croyons devoir signaler spécialement les deux Ouvrages suivants, déjà cités dans certaines réponses, qui n'ont pas encore été mentionnés dans la bibliographie de l'*Intermédiaire* et qui se recommandent notamment par leur clarté et leur élégance.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES NOMBRES, par *E. Cahen.* — 1 vol. in-8 de 403 pages. Paris, 1900; Gauthier-Villars et Cie, éditeurs. Prix : 12fr.

Cet Ouvrage contient les matières suivantes :

Premières propriétés des nombres entiers; nombres fractionnaires; fractions continues; congruences; restes quadratiques; nombres incommensurables; classification de ceux-ci; formes quadratiques binaires; analyse indéterminée du premier et du second degré.

Notes annexes : Compléments à la théorie des nombres premiers; décomposition des grands nombres en facteurs premiers; calcul des racines primitives; fonctions numériques; nombres imaginaires de Gauss; nombres imaginaires quadratiques en général.

THÉORIE DES NOMBRES (Cours de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris), par *E. Cahen.* — Tome I, le premier degré : 1 vol. in-8 de 408 pages. Paris, 1914; Hermann et fils, éditeurs. Prix : 14fr.

Cet Ouvrage contient les matières suivantes :

Déterminants; systèmes d'équations diophantiennes (c'est-à-dire du premier degré à n inconnues, en nombres entiers); substitutions linéaires homogènes, groupes; formes linéaires, formes bilinéaires; congruences; calcul des tableaux (ou matrices), tableaux entiers;

décomposition des nombres en facteurs premiers, indicateur; congruences à module premier.

Le Tome II est à l'impression. E. M.

Léon Autonne (1859-1916), par *Edmond Ouivet.*

Une Notice nécrologique relative à ses travaux scientifiques a paru dans la *Revue internationale de l'Enseignement* (15 mars et 15 avril 1917). E. M.

Solutions of the examples in a treatise on differential equations, par *A.-R. Forsyth.* — 1 vol. in-8 de 249 pages. Londres, 1918; Macmillan and Co, éditeurs. Prix : 10 shillings (net).

En dehors de ses beaux Ouvrages, d'un caractère élevé, sur la théorie des fonctions d'une ou de deux variables, sur la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles, sur la Géométrie différentielle, bien connus des travailleurs de l'enseignement supérieur, M. A.-R. Forsyth a publié un Manuel sur les équations différentielles, qui est du degré de difficulté des études de licence. Ce cours, qui va des éléments aux équations aux dirivées partielles du deuxième ordre, comprend, comme beaucoup de livres anglais, de nombreux exercices proposés. Pour faciliter l'usage de son Manuel aux jeunes étudiants, l'auteur édite aujourd'hui une clé de ces exercices. Les solutions proposées sont correctes, brèves et souvent intéressantes. L'Ouvrage peut rendre des services aux étudiants français qui ne peuvent suivre les conférences des Facultés, et même aux autres. A. B.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for 1916. — 1 vol. in-8 de viii-607 pages. Washington, 1917; Governement printing Office, éditeur. Prix : 4 dollars.

Cette publication, qui concerne l'ensemble des sciences, contient notamment d'intéressants rapports sur le *Langley Aerodynamical Laboratory* et sur l'*Astrophysical Observatory* (Washington et Mount Wilson), ainsi que des Notices d'Abbot (*News from the stars*) et de Maxim (*Gun-report noise*). A. B.

Précis de Mécanique rationnelle, par *P. Appell* et *S. Dautheville* (Introduction à l'étude de la Physique et de la Mécanique appliquée, à l'usage des certificats de licence et des élèves des écoles techniques supérieures); 2e édition revue et augmentée. — 1 vol. in-8 (25-16) de 734 pages, avec 230 figures. Paris, 1918; Gauthier-Villars et Cie, éditeurs. Prix : 50fr.

La Mécanique rationnelle, limitée en ses principes et méthodes, comporte des développements considérables d'application : un exposé d'ensemble en a été donné par M. Appell dans son grand Traité en trois forts volumes. Mais l'étudiant qui n'a en vue que l'obtention du certificat de Mécanique rationnelle est un peu effrayé par l'abondance des matières, et la simplicité des procédés mis en œuvre lui échappe.

M. S. Dautheville a rendu un grand service en extrayant du précédent Traité une stricte exposition du programme de licence; le Manuel qu'il a établi, accompagné d'exercices choisis en vue de la préparation actuelle à la licence et à l'agrégation, est très pratique, et il fournit aux candidats sérieux le moyen de réussir aux examens sans avoir besoin de suivre les cours des Facultés.

D'ailleurs deux Chapitres consacrés à des notions, l'un de statique graphique, l'autre de résistance des matériaux, soudent la mécanique théorique à celle des corps réels, et visent les étudiants qui s'orientent vers la physique ou la technologie.

La première édition a été épuisée en peu de temps, malgré la guerre; le même succès attend l'édition actuelle. La clarté bien connue de l'enseignement de M. Appell en est un gage, et l'Ouvrage répond à un réel besoin de notre époque. I. U.

Cours d'Analyse mathématique (Cours de la Faculté des Sciences de Paris), par *Édouard Goursat*. 3e édition revue et augmentée. Tome II : Théorie des fonctions analytiques; équations différentielles; équations aux dérivées partielles du premier ordre. — 1 vol. in-8 de IV-670 pages avec 39 figures. Paris, 1918; Gauthier-Villars et Cie, éditeurs. Prix : 30fr.

Le cours de M. Goursat est très réputé, tant en France qu'à l'étranger, pour la simplicité de sa rédaction en même temps que pour la richesse de sa documentation; il est à la fois élémentaire et

suggestif; il mène très loin l'étudiant sortant de la classe de Mathématiques spéciales, au point où il peut entreprendre des recherches personnelles.

A signaler comme nouveauté dans ce Volume une Note consacrée à la démonstration élémentaire du théorème de M. Picard sur la constance d'une fonction entière ne pouvant prendre deux valeurs données distinctes, et des généralisations de ce théorème.

Le présent Volume s'adresse à bien des catégories de lecteurs; nous le recommanderons spécialement aux candidats à l'agrégation des sciences mathématiques : ceux qui autrefois ont reçu la direction de M. Goursat, tandis qu'il était maître de conférences à l'École Normale ont gardé un excellent souvenir de l'efficacité de son enseignement.

A. B.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

CHATELET (A.), Ancien Élève de l'École Normale supérieure, Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Toulouse. — **Leçons sur la Théorie des Nombres.** (*Modules. Entiers algébriques. Réduction continuelle*), professées au Collège de France. In-8 (25-16) de x-156 pages; 1913. 6 fr. 60 c.

DUMONT (E.), Capitaine du Génie belge. — **Théorie générale des nombres.** *Définitions fondamentales.* (Collection Scientia.) In-8 (20-13) de 194 pages avec 10 figures, cartonné; 1915..... 2 fr. 40 c.

FRENET, Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Lyon. — **Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal.** Ouvrage destiné aux Candidats à l'Ecole Polytechnique, à l'Ecole Normale, aux Eleves de ces Ecoles et aux aspirants à la Licence ès Sciences mathématiques. 7e édition, augmentée d'un *Appendice sur les résidus, les fonctions elliptiques, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différentielles totales*, par H. Laurent, Examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, et un *Formulaire concernant les fonctions elliptiques*, par R. de Montessus de Ballore, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille. In-8 (23-14) de xiv-556 pages avec figures; 1917. 10. fr 80 c.

MONTESSUS de BALLORE (R. de), Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille. — **Exercices et Leçons de Mécanique analytique.** *Centre de gravité. Attraction. Potentiel. Moment d'inertie. Dynamique des corps solides et des systèmes. Les fonctions elliptiques dans le domaine réel.* In-8 (23-14) de vi-334 pages, avec 72 figures; 1915. 14 fr. 40 c.

QUESTIONS.

4899. [S6b] Dans une lettre, adressée le 8 janvier 1640, par Evangelista Torricelli à Raffaello Magiotti, je trouve le mode suivant de génération ponctuelle de la parabole de la balistique :

Soit A l'orifice d'une fontaine placée contre un mur ou encore d'une pièce d'artillerie ; AD est l'axe du canon ou de la fontaine; C est le point imposé par lequel doit passer le jet d'eau, parabolique ou la trajectoire du boulet; DC est enfin la verticale passant par ce but C.

Autour du sommet A pivote une droite variable AE qui perce le côté opposé CD du triangle ACD en un point E; par ce point E on mène la parallèle EF au côté AD; par le point F d'intersection de cette droite EF avec le côté AC, on mène enfin la parallèle FH au côté CD. Soit H le point de rencontre de FH avec la droite initiale AE.

Ce point H décrit une parabole d'axe parallèle à CD, tangente en A à AD et passant par le point C.

J'ajoute que, dans cette construction de Torricelli, la tangente au point courant H de la parabole est la médiane issue de H du triangle formé par AH, AD et le diamètre (parallèle à CD) de la parabole passant par H.

Le temps mis par le projectile pour décrire l'arc AH de la parabole est constamment représenté (à un facteur constant près) par le segment DE.

Ces dernières propriétés de la figure de Torricelli ont-elles été déjà remarquées? E. Turrière.

Note. — La verticale FH rencontrant AD en un point M, la tangente en H passe au milieu de AM.

La Rédaction.

4900. [**I 25b**] Ayant observé que les carrés associés aux nombres sont habituellement par défaut (sous-carrés), je suis amené à demander si l'on a eu déjà l'idée d'associer à leur tour les carrés par excès (sur-carrés).

Cette dualisation mérite d'être retenue, car elle donne alors des résultats corrélatifs présentant des analogies d'origine, mais aussi des différences particulières.

J'ai eu l'occasion de signaler de ces suites numériques en partant des sous-carrés, mais ce n'est qu'après un intervalle de quinze ans que j'ai enfin pensé à former les suites corrélatives en partant des sur-carrés.

Je demande pour le moment si cette dualisation a été déjà définie et étudiée. H. Brocard.

4901. [**I 19c**] Soient E, D la partie entière et la partie décimale, de n chiffres, de la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre N

$$\sqrt[m]{N} = E, D.$$

Si n est assez petit, 2, 3, 4, par exemple, il paraît possible que D représente certainement les n premières décimales d'une racine $m^{\text{ième}}$ (carrée, cubique, quatrième, etc.)

Mais si n est déjà égal à 5, par exemple, peut-on affirmer que toute permutation de D corresponde à certaines valeurs de N et de m?

Les éléments définis ci-dessus peuvent donner le sujet de plusieurs questions d'arithmologie, de celle-ci entre autres :

Résoudre l'équation

$$X = Y, D + Z, \Delta,$$

Y, D et Z, Δ étant les racines, de même indice m, de deux nombres et Δ étant le complémentaire de D (ce qui est le cas pour $D = 54821$ et $\Delta = 45179$).

Peut-être conviendra-t-il que m ne dépasse pas 2 ou 3.

H. Brocard.

4902. [**I 3b**] Trouver les entiers n qui jouissent de la

propriété suivante : $a^{n-1} - 1$ *est divisible par* n *pour tout entier* a *premier à* n.

Les nombres premiers jouissent de cette propriété, d'après le théorème de Fermat, mais il y a d'autres solutions, par exemple 561, 1729. Je demande, si possible, la solution générale.

Je démontre qu'un entier n répondant à la question est impair (sauf $n = 2$), qu'il ne contient pas de facteur premier multiple, que s'il contient plus d'un facteur premier, il en contient au moins trois.

A défaut de solution, peut-on indiquer si cette question a déjà été traitée et où ? E. Cahen.

4903. [**Q4**] Existe-t-il un même nombre de jetons qui puisse aussi bien s'arranger en carré, en triangle équilatéral, et en hexagone régulier? La réponse sera sans doute négative. On s'aperçoit sans peine que le problème équivaut à celui-ci : Trouver les solutions entières communes aux deux équations de Pell (ou de Fermat)

$$x^2 - 2y^2 = 1, \qquad y^2 - 3z^2 = 1,$$

et j'ai montré en effet que le nombre des jetons, s'il existe, ne saurait être inférieur à 10^{24}. Mais la démonstration exacte de l'impossibilité semble présenter assez de difficultés.

S. Wigert (Stockholm).

4904. [**L²2g**] Bibliographie des coniques sphériques.

A. Colucci (Caserte).

4905 [**I17**] L'équation de Fermat $x^2 - Dy^2 = -1$ est résoluble en entiers seulement pour certaines valeurs de D, telles que

$$2, 5, 10, 13, 17, 26, 29, 37, \ldots.$$

Quelle est la loi de récurrence dans cette suite?

A. Colucci (Caserte).

4906. [**L'7b**] Soient F, d un foyer d'une conique et la directrice correspondante.

Voici une construction simple de la tangente à la conique en un de ses points P :

On mène par F la droite f perpendiculaire à FP. G étant le point commun à d et f, la droite GP est la tangente cherchée.

Ce résultat est connu? Où et par qui a-t-il été donné pour la première fois? A. Colucci (Caserte).

4907. [**V9**] Pendant son séjour à Paris, Abel a écrit à Holmboe : « Cauchy est fou, et avec lui il n'y a pas moyen de s'entendre, bien que, pour le moment, il soit celui qui sait comment les mathématiques doivent être traitées ».

Je désirerais savoir quels sont les motifs qui ont pu amener Abel à formuler une aussi étrange appréciation.

F. Balitrand.

4908. [**M'5b**] L'hypocycloïde à trois rebroussements, rapportée à un système d'axes de coordonnées rectangulaires quelconque, a une équation tangentielle de la forme

$$\varphi_3(u, v) + u^2 + v^2 = 0;$$

$\varphi_3(u, v)$ désignant un polynome homogène et du troisième degré en u et v.

A-t-on étudié, et connaît-on quelques propriétés de la surface qui a pour équation tangentielle

$$\varphi_3(u, v, w) + u^2 + v^2 + w^2 = 0;$$

φ_3 désignant un polynome homogène et du troisième degré en u, v, w. F. Balitrand.

4909. [**M'b**] On considère une chaînette rapportée à ses axes habituels et sa développée. Soient s un arc de la première courbe, compté à partir du sommet, et σ l'arc correspondant de la seconde. Démontrer :

1° Que l'on a

$$s^2 = a\sigma;$$

a désignant le paramètre de la chaînette.

2° Que

$$s\sigma = \frac{3}{4}A;$$

A étant l'aire limitée par l'arc de la développée, l'axe des x, l'ordonnée à l'origine et l'ordonnée à l'extrémité de l'arc.

3° Que

$$\sigma\sigma' = a^2;$$

σ et σ' étant deux arcs, comptés à partir du point de rebroussement et tels que les tangentes à leurs extrémités soient rectangulaires. F. Balitrand.

4910. [**V9**] L'annuaire des anciens élèves de l'École polytechnique pour l'année 1914 donne la liste (p. 75 et suiv.) des professeurs ayant occupé les différentes chaires de l'École depuis sa fondation. Chasles y figure comme ayant professé le cours d'Analyse de 1842 à 1850.

N'est-ce pas une erreur? Nous croyons que Chasles n'a jamais occupé que la chaire du cours de machines et de géodésie où il a succédé à Savary en 1841 et qu'il a abandonnée en 1851 pour protester contre la réforme des programmes décidée sous l'influence de Leverrier.

F. Balitrand.

4911. [**A1c**] Sait-on calculer la somme

$$S = 1^k C_n^1 + 2^k C_n^2 + \ldots + n^k C_n^n?$$

H. Sebban.

4912. [**A1c**] Je désirerais des renseignements bibliographiques sur le calcul de la somme des puissances $p^{\text{ième}}$ des coefficients du binome? H. Sebban.

4913. [**I19**] Solutions entières de l'équation

$$x^4 + y^4 = z^4 + t^4$$

comportant des paramètres arbitraires.

A. Colucci (Caserte).

4914. [**I19**] Résoudre l'équation double

$$(a^2 + b^2)^2 x^2 + (a^2 - b^2)^2 y^2 = p^2,$$
$$(a^2 - b^2)^2 x^2 + (a^2 + b^2)^2 y^2 = q^2.$$

Chaque solution en donne une pour l'équation

$$X^4 + Y^4 = Z^4 + T^4,$$

ainsi $a = 2$, $b = 1$, $x = 7$, $y = 4$ donne la solution d'Euler

$$542^4 + 103^4 = 514^4 + 359^4.$$

(Voir à ce sujet ma réponse à 4734.)

M. Rignaux.

4915. [**I19**] Les nombres x, y, z, K étant entiers, chercher des identités pour satisfaire à

$$x^3 + y^3 + z^3 = K(x + y + z).$$

Exemples :

$$\begin{aligned} x &= 6,\ 3,\ 3, \\ y &= 2,\ 2,\ 4, \\ z &= 1,\ 1,\ 5, \\ K &= 25,\ 6,\ 18. \end{aligned}$$

Avec le deuxième exemple, on a aussi une solution de

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^2.$$

A. Gérardin.

4916. [**K14**] Peut-on déterminer le nombre des faces d'un polyèdre convexe de n sommets?

Je désirerais une discussion aussi complète que possible.

G. Boulloud.

4917. [**L'15**] Quel est le lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle ABC, et telles que les normales aux points A, B, C concourent en un point P?

Quel est le lieu de P? A. Colucci (Caserte).

4918. [**I1**] Comment pourrait-on généraliser les propositions de ma question **4730** (**1917**, 32, 96; **1918**, 35, 112) pour un nombre N de racine n dans un système de base λ?

2° Si les propositions énoncées dans ma question **4730** sont vraies, comment pourrait-on les généraliser pour le cas où l'on augmente de m chacun des chiffres du nombre N de racine n? Les chiffres de p, racine exacte de P, sont-ils égaux à ceux de n augmentés respectivement de m?

H. Sebban.

2288. [**H5f**] (**1902**, 36) Soit

$$\varphi(\mu x) = F(\alpha\mu + \beta,\ \alpha'\mu + \beta',\ \alpha''\mu + \beta'',\ x),$$

où F désigne la série hypergéométrique.

Le rapport $\dfrac{\varphi(\mu x)}{\varphi(\mu - \lambda x)}$, où λ est une constante, tend-il vers une limite, fonction ou non de x, quand μ croît indéfiniment?

Peut-on déduire la solution de cette question du Mémoire de Schwarz (*Cr.*, 1873)?

Cas particulier où λ, α, α', α'', μ sont entiers, ainsi que deux des constantes β. *Limaçon.*

2292. [**B1c**α] (**1902**, 38) Soient

$$a_n = f(n)$$

et

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Existe-t-il des relations de récurrence entre les déterminants D_n, entre les déterminants Δ_n, entre les déterminants D_n et Δ_n? Plus généralement, je demande des références bibliographiques sur ces deux catégories de déterminants. Les seules indications que j'aie pu rencontrer sont celles que donnent Brioschi et M. Pascal dans leurs Traités généraux des déterminants [1]. R. DE MONTESSUS.

2304. [**I18**] (S) (**1902**, 68) Comme suite à la question 2251 (**1902**, 1), peut-on traiter les cas particuliers où :

1° N impair quelconque $> 5^2$, $n = 2$, $p = 7$, 4 des carrés au moins étant distincts?

2° N quelconque, $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ou 10, $p = 10$?

3° N quelconque > 3, $n = 2$ ou 5, $p = 7$?

G. DE ROCQUIGNY.

2310. [Σ] (**1902**, 90) Comme suite au sujet d'études 1667 (**1899**, 246) on peut se poser le problème analogue dans la théorie des groupes de transformations de Lie : formation de tous les groupes de Lie dérivés d'un groupe régulier simple et de son conjoint ou réciproque, détermination exacte de leur *classe géométrique*, etc. [mêmes références bibliographiques que pour la question 2249 (**1901**, 310), p. 69].

E. MAILLET.

2311. [**K 20a**] (**1902**, 90) Les auteurs anglais emploient la dénomination *haversine a* pour $\frac{1}{2}(1 - \cos a)$.

Probablement *haversine* provient de *half-versine* (moitié-versine). Quelque correspondant pourrait-il me donner le nom de l'auteur de cette nouvelle dénomination?

C. WARGNY (Valparaiso).

---

[1] M. Pascal signale la Thèse inaugurale de Hankel (Göttingue, 1861), mais il a été impossible à l'auteur de la question de trouver cet Ouvrage dans les Bibliothèques de Paris.

2314. [**K 5c**] (**1902**, 91) Un triangle ABC et un cercle (O) de son plan étant donnés, quelle est l'enveloppe des côtés des triangles inscrits à (O) et trihomologiques à ABC? Étudier aussi le cas où le triangle s'évanouit, c'est-à-dire le cas où les trois points sont en ligne droite; il peut offrir un certain intérêt, puisqu'il contient la triorthologie de deux triangles comme cas particulier de la trihomologie.

G. Espanet.

2316. [**K 5c**] (**1902**, 91) Soient ABC un triangle, O un cercle de son plan, A′ un point de la circonférence de ce cercle. Peut-on construire à l'aide de la règle et du compas un triangle A′B′C′, inscrit à O et tel que ABC et A′B′C′ soient trihomologiques? A′ peut être remplacé par une tangente, alors A′B′C′ serait circonscrit à O. G. Espanet.

2317. [**K 5c**] (**1902**, 91) Soient ABC, A′B′C′ deux triangles de l'espace; les trois hyperboloïdes :

$$\begin{array}{lll} AA', & BC', & CC'; \\ AB', & BC', & CA'; \\ AC', & BA', & CB' \end{array}$$

se coupent suivant la même courbe; si, d'un point S de cette intersection commune comme point de vue, on fait la perspective des deux triangles et des droites de jonction sur un plan quelconque, on obtient deux triangles trihomologiques; et si A, B, C sont en ligne droite, on rencontre le cas particulier de la triorthologie. A-t-on étudié la trihomologie de cette manière et peut-on arriver par là à quelques résultats généraux? G. Espanet.

2327. [**O 6s**] (**1902**, 93) Comme suite à la question 2083, résolue (**1902**, 46), je proposerai de vérifier s'il existe aussi une détermination simple de la surface engendrée par deux cercles concentriques de rayons a et b, décrits autour d'un point M d'une surface dans le plan tangent en ce point. H. Brocard.

2329. [Σ] (1902, 94) Trouver pour chaque structure des groupes simples de Lie une limite supérieure ou une valeur exacte de l'ordre des sous-groupes de chacun de ces groupes. (Réf. bibl., Cartan, *Thèse de Doct.*, et *comp.* Maillet, *J. M.*, 1895.) E. Maillet.

2333. [I 11] (1902, 95) On sait que les nombres harmoniques sont ceux qui sont formés uniquement des facteurs premiers 2, 3 et 5; ils ont donc la forme $2^p \times 3^q \times 5^r$.

Je crois impossible de trouver en général l'expression du nombre harmonique de rang n, c'est-à-dire les valeurs de p, q, r en fonction de n, mais je demande un moyen assez rapide de pouvoir obtenir, pour une valeur donnée de n, par exemple pour $n = 10^{10}$, les susdites valeurs.

Juan-J. Duran-Loriga (La Corogne).

2336. [Σ] (1902, 96) La fonction

$$\varphi(x) = e^{\sum \frac{x^p}{p}},$$

où l'exposant p parcourt la série des nombres premiers, n'est pas une fonction entière.

Cependant, si ε est une racine primitive de l'unité, le produit

$$\varphi(x)\,\varphi(\varepsilon x)\,\varphi(\varepsilon^2 x)\ldots\varphi(\varepsilon^{n-1} x)$$

est une fonction entière, quel que soit le nombre n.

Je désirerais connaître toutes les fonctions non entières jouissant de cette propriété.

Ivar Fredholm (Stockholm).

RÉPONSES.

2250 (**1901**, 310) (E. Maillet). — *Équations indéterminées* (**1902**, 323). — Dans ma Note déjà mentionnée (**1918**, 129) des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. 18, p. 2 et suivantes, j'ai apporté une contribution à la solution de la question **2250** en indiquant le moyen d'obtenir dans des cas étendus une limite supérieure des valeurs absolues des solutions, et, par suite, comme cela est évident, de leur nombre. E. Maillet.

2839 (**1904**, 259) (Ferber). — *Systèmes d'équations différentielles* (**1905**, 64; **1906**, 110). — *Voir* aussi ma réponse à 2893 (**1906**, 114).

Je retrouve dans mes papiers une lettre du regretté Ferber, lettre qu'il m'avait adressée au cours d'une correspondance relative à sa question 2839, à la suite de la communication du manuscrit de ma réponse à 2839 (**1905**, 64) et de résultats numériques. La publication de cette lettre ne me paraît pas sans intérêt, parce que c'est un document qui éclaire un point de l'histoire du coefficient k (**1905**, 66), et marque peut-être une date intéressante dans le développement de la théorie de l'aviation. E. Maillet.

Chalais (Meudon), le 9 février 1905.

Merci infiniment de ta bonne communication. Tu m'as démontré quelque chose que je sentais sans pouvoir le trouver. Il faut dire aussi qu'un anglais, le professeur Bryan, m'a donné d'excellents renseignements (*voir* **1906**, 115). Seulement, maintenant, j'aimerais savoir de quelle manière on pourrait avoir les autres solutions, qui probablement sont importantes dans le cas des accidents. Par exemple, il arrive parfaitement que le bord avant soit relevé avec force.

Au sujet de tes vérifications numériques, je suis d'accord avec toi : on trouve avec mes chiffres $k = 0,68$. Je n'ose pas encore l'employer, car c'est « inouï ». La valeur trouvée par le colonel Renard, Langley, Canovetti, etc., n'est que de 0,085. Les aviateurs, ceux qui voulaient voler, adoptaient 0,13 avec Newton et se croyaient déjà bien audacieux. J'attends donc une confirmation de

la suite de mes expériences, car mes chiffres peuvent être légèrement erronés. Cependant je dois dire que, plus je vais, plus mes chiffres concordent, et qu'ils ont plutôt tendance à faire croître k qu'à le diminuer.

C'est incroyable et en même temps bien amusant, parce que c'est comme cela qu'on peut arriver à comprendre pourquoi les oiseaux volent, ce que les mathématiques jusqu'à présent se refusaient à démontrer.

Bien à toi,
FERBER.

2923 (**1905**, 128) (*Nobel*). — *Biographie de C. Strack* (**1910**, 104). — La ville de Strasbourg étant redevenue française, il pourra y être fait aisément des recherches dans les registres de l'état civil et des habitants aux environs de 1806, avec quelque chance de réussite à découvrir l'identité de Ch. Strack.

Il est à souhaiter que cette question soit reprise avec attention.

H. BROCARD.

4470 (**1915**, 52) (A. GÉRARDIN). — *Anciens élèves d'Édouard Lucas*. — L'un d'eux, M. Eugène Bahier, ingénieur des Arts et Manufactures, a publié en 1916 un volume de 266 pages intitulé : *Recherches méthodiques et Propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*, dont une analyse a été donnée au *Bulletin des Sciences mathématiques*, par M. D.-A. Roche (1917, p. 235-236).

H. BROCARD.

4636 (**1916**, 75) (E.-N. BARISIEN). — *Valeurs approchées de* $\sqrt{2}$ *et de* $\sqrt{3}$ *en fonction du nombre* π (**1917**, 64; **1918**, 108).

Je signalerai, à propos de cette question, la série suivante où x et y représentent le cosinus et le sinus d'un arc s

$$(1)\quad \left(\frac{\pi}{2}-s\right)y = x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3.5}x^3 - \ldots - \frac{2.4\ldots 2m}{3.5\ldots 2m+3}x^{2m+3} - \ldots$$

Si l'on suppose x et y positifs, la valeur du second membre calculée jusqu'au terme de rang m est approchée par excès, mais, en remarquant que la somme des termes négligés est plus petite que

$$\frac{2.4\ldots 2m}{3.5\ldots 2m+3}x^{2m+3}\frac{1}{1-x^2},$$

on peut obtenir une valeur approchée par défaut.

Il suffit de donner à x et à y les valeurs rationnelles ou non, qui

correspondent à une valeur $\frac{\pi}{n}$ de l'arc s, pour obtenir, au moyen de la formule (1) deux suites définissant π en fonction des valeurs particulières de x et y. Par exemple, en faisant,

$$x = \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad s = \frac{\pi}{3}$$

nous formerons les deux suites ci-dessous, l'une croissante, l'autre décroissante ayant pour limite commune $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$:

$$\frac{32}{36}, \quad \frac{326}{360}, \quad \frac{2\,285}{2\,520}, \quad \frac{13\,712}{15\,120}, \quad \frac{150\,835}{166\,320}, \quad \frac{1\,960\,861}{2\,162\,160}, \quad \frac{1\,960\,862}{2\,162\,160}, \quad \ldots$$

$$\frac{33}{36}, \quad \frac{327}{360}, \quad \frac{2\,286}{2\,520}, \quad \frac{13\,713}{15\,120}, \quad \frac{150\,830}{166\,320}, \quad \frac{1\,960\,866}{2\,162\,160}, \quad \frac{1\,960\,863}{2\,162\,160}, \quad \ldots$$

Le calcul est beaucoup plus rapide qu'avec la série rappelée page 64 (**1917**).

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17}, \quad \ldots$$

Quoi qu'il en soit, ces résultats n'ont qu'un intérêt de curiosité, car même s'il existait, par hasard, une fraction assez simple voisine de la valeur de $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ son usage serait bien rarement avantageux.

Je ferai remarquer seulement que la relation (1) permet de définir $\frac{\pi}{4}$ par une série dont les termes sont rationnels, si l'on choisit

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad s = \frac{\pi}{4}.$$

La série est alors

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{30} - \frac{1}{105} - \frac{1}{315} - \frac{4}{3\,465} - \frac{4}{9\,009} - \frac{8}{45\,045}, \quad \ldots,$$

sa convergence est analogue à celle d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et le procédé indiqué permet d'obtenir simultanément à chaque approximation une valeur par excès et une valeur par

défaut. Les premiers termes des deux suites sont

$$\frac{4}{6},\ \frac{23}{30},\ \frac{82}{105},\ \frac{247}{315},\ \frac{2720}{3465},\ \frac{37372}{45045},\ \frac{35376}{45045},\ \ldots,$$

$$\frac{5}{6},\ \frac{24}{30},\ \frac{83}{105},\ \frac{248}{315},\ \frac{2724}{3465},\ \frac{35392}{45045},\ \frac{35384}{45045},\ \ldots.$$

J. Ser.

4682 (**1916**, 219) (T. Ono). — *Droite enveloppant l'ellipse de Brocard* (**1918**, 130). — Nous avons reçu de M. A. Schiappa Monteiro (Lisbonne) un véritable Mémoire consacré à l'étude et à la solution de cette question. L'auteur le destinant, croyons-nous, à un autre journal, et son étendue n'en permettant pas l'insertion dans l'*Intermédiaire*, nous devons nous borner à dire que sa démonstration s'appuie sur les propriétés focales de l'ellipse (théorème de Poncelet), les définitions des cercles adjoints, et diverses propositions dues à E. Cesaro et à M. Gob, énoncées et démontrées dans le *Progreso* (Zaragoza) de 1892 et de 1894. La Rédaction.

4761 (**1917**, 99) (H. Brocard). — *Jeu de Halma* (**1918**, 62). — La réponse donnée ici ne s'applique pas à la question posée. La biographie de Halma est bien connue, mais je demande si ce nom est celui de l'inventeur du jeu mentionné (*loc. cit.*), ou s'il admet une autre signification. H. Brocard.

4777 (**1917**, 122) (*C. Boré*). — *Position d'équilibre d'un point matériel soumis à l'action de forces égales dirigées vers les sommets d'un pentagone* (**1918**, 62). — Ma précédente réponse (**1918**, 62) suppose que les p forces sont égales et de même signe, c'est-à-dire simultanément des attractions ou des répulsions.

Dans cette hypothèse, pour $p = 3$, la position d'équilibre (centre isogone intérieur) n'est réelle qu'autant que le plus grand angle du triangle est inférieur à $\frac{2\pi}{3}$. Mais si la force dirigée vers le sommet correspondant au plus grand angle est de signe opposé aux deux autres, il y a toujours au moins une position d'équilibre : le centre isogone extérieur, si cet angle est inférieur à $\frac{2\pi}{3}$, les deux centres isogones (tous deux extérieurs) si cet angle est supérieur à $\frac{2\pi}{3}$.

En revenant à l'hypothèse de l'égalité des signes, pour $p = 4$, si le quadrilatère est plan et *convexe*, la position d'équilibre unique est évidemment l'intersection des diagonales intérieures. Mais pour

un quadrangle (quadrilatère plan non convexe), il n'y a pas de position d'équilibre réelle.

Supposons au contraire que la force dirigée vers le sommet intérieur du quadrangle soit de signe contraire aux trois autres : il y aura alors trois positions d'équilibre, aux intersections de chaque couple de côtés opposés du quadrangle.

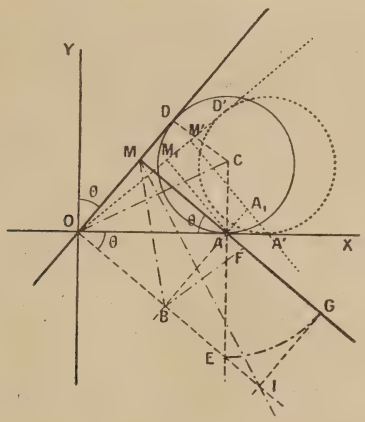
Le cas général $p = 4$, correspondant au tétraèdre, ne paraît pas avoir de solution géométrique simple, car il n'y a pas, en général, de point d'où les six arêtes soient vues sous des angles égaux; mais, quand ce point existe, c'est une position d'équilibre.

P. Hendlé.

4814 (**1918**, 8) (H. Brocard). — *Construction de la tangente à une courbe* (**1918**, 69, 136). — Je rectifie comme il suit ma précédente réponse (**1918**, 136).

OY étant la perpendiculaire à OX du côté où se trouve le cercle (C), soient YOM $= \theta$ et OA $= u$. Considérons deux positions successives du cercle et de l'équerre, et projetons A en M_1 sur OM′ et en A_1 sur A′M′.

Le centre instantané de rotation I se trouve sur la perpendiculaire



à MO en O; soit B le point où elle coupe la perpendiculaire à MA en A, et E celui où elle coupe la perpendiculaire à OA en A.

Le déplacement MM′ peut se décomposer en MM_1 et M_1M'.

MM_1 est produit par une rotation $d\theta$ autour de B, et l'on a

$$MM_1 = MB\, d\theta = u\, d\theta.$$

La translation

$$M_1M' = AA_1 = \sin\theta\, du,$$

peut, à la limite, être considérée comme produite par une rotation $d\theta$ autour d'un point F de MA, tel que l'on ait

$$MF\, d\theta = \sin\theta\, du.$$

Or

$$u = R \operatorname{cotang} \frac{MOA}{2} = R \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = R\,\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta};$$

d'où

$$MF = u \operatorname{tang}\theta.$$

Ces deux rotations élémentaires d'angles égaux se composeront comme des forces, et le point I sera par conséquent tel que

$$OI = OB + MF = OB + OA \operatorname{tang}\theta = MA + AE.$$

D'où la construction :

« La perpendiculaire à OA en A coupant en E la perpendiculaire à MO en O, on prolonge MA de la longueur AG = AE; la perpendiculaire à MG en G coupe OE au centre instantané de rotation I cherché; de plus, MA touche son enveloppe en G. »

Le *lieu du point* M est une quintique unicursale bicirculaire, asymptotique à $Y - 2R = 0$, et ayant à l'origine un point triple équivalent à quatre points doubles :

$$X = R\,\frac{(1+\sin\theta)\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

$$Y = R(1+\sin\theta)\sin\theta,$$

ou

$$Y(X^2+Y^2)^2 - 2RX^2(X^2+Y^2) - R^2X^2Y = 0.$$

Le mouvement de l'équerre est le résultat du *roulement d'une quartique unicursale circulaire et parabolique*

$$\xi = R\,\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}(\cos\theta + \operatorname{tang}\theta),$$

$$\eta = R\,\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta$$

ou

$$\eta^2(\xi^2+\eta^2) - 2R\xi^3 + R^2(3\xi^2 + 11\eta^2) - R^4 = 0$$

(points doubles :

$$\xi = R, \qquad \eta = 0$$

et

$$\xi = -5R, \qquad \eta = \pm 3\sqrt{2}Ri)$$

sur une sextique unicursale bicirculaire et parabolique ayant à l'origine un point quadruple à deux branches réelles seulement

$$x = \quad R(1+\sin\theta)(\cos\theta+\tang\theta)$$
$$y = -R(1+\sin\theta)(\cos\theta+\tang\theta)(\tang\theta)$$

ou

$$x^2(x^2+y^2)^2+2Ry(x^2+y^2)(2x^2+y^2)+R^2(y^4+x^2y^2-x^4)=0.$$

Enfin, *l'enveloppe de* MA, ou lieu de G, est une quartique tricuspidale circulaire et parabolique,

$$x_1 = R\cos\theta\,\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta},$$

$$y_1 = R\,\frac{\sin^2\theta}{1-\sin\theta}$$

ou

$$x_1^2(x_1^2+y_1^2)-2Ry_1(5x_1^2+4y_1^2)$$
$$+2R^2(6y_1^2-x_1^2)-6R^3y_1+R^4=0.$$

(Points de rebroussement :

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = \frac{R}{2}$$

et

$$x_1 = \pm 3\sqrt{3}Ri, \qquad y_1 = -4R.)$$

P. Hendlé.

On trouve pour équation du lieu de M en coordonnées polaires

$$\rho = r\cos\omega\cot\frac{\omega}{2}$$

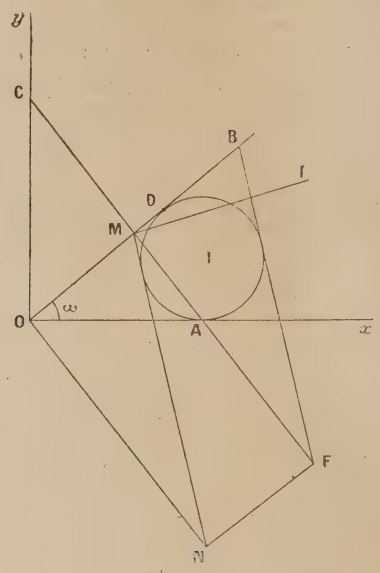
(r rayon du cercle).

On en tire

$$\frac{d\rho}{d\omega} = -\rho\left(\tang\omega+\frac{1}{\sin\omega}\right).$$

On déduit de ces résultats la construction suivante pour la tangente. AM étant prolongé jusqu'en C point de rencontre avec l'axe OY perpendiculaire à OX, on porte sur AM en dessous de AX, AF = OC; on prend le point B symétrique de O par rapport à M, la tangente MT est perpendiculaire à BF.

Si l'on considère la courbe comme décrite mécaniquement, le centre de rotation instantané se trouve d'une part sur la perpendiculaire ON à OM, d'autre part, sur une perpendiculaire FN à AM



élevée du point où la droite AM touche son enveloppe, c'est-à-dire du point de rencontre de AM avec une position infiniment voisine. Le point de rencontre de deux positions de AM peut être déterminé par le théorème de Ménélaüs, et l'on trouve que, lorsque ces deux positions viennent à se confondre, ce point de rencontre vient au point F, défini comme nous l'avons fait plus haut. Il en résulte pour la tangente la même construction que précédemment.

P. Poulet.

4816 (**1918**, 26) (R. de Montessus de Ballore). — *Biquadratiques gauches* (**1918**, 72). — Voici une liste chronologique de quelques références.

L. Cremona. — Intorno alla curva gobba del 4° ordine per la quele passa una sola superficie di 2° grado (*A. D. M.*, 1861, p. 71-101).

L. Cremona. — Sopra una certa curva gobba di 4° ordine (*R. I. L.*, 1868, p. 199-202).

E. Laguerre. — Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre (*J. M.*, 1870, p. 193-216).

E. Bertini. — Sulla curva gobba di 4° ordine e 2ª specie (*R. I. L.*, 1872, p. 622-638).

Küpper. — Ueber Raumcurven 4 ordnung erster Art und eine specielle ebene Curve 4 Ordnung (*A. G. P.*, 1873, p. 29-39).

H. Léauté. — Représentation des fonctions elliptiques de première espèce à l'aide de biquadratiques gauches (*C. R.*, t. 83, 1876, p. 527-529).

P. Appell. — Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du 4ᵉ ordre [celles dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire] (*C. R.*, t. 83, 1876, p. 1209-1211).

H. Drasch. — Zur Construction der Schmiegungsebene der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiter Ordnung (*S. A. W.*, 1880, p. 254-259).

A. Adler. — Ueber Raumcurven 4 Ordnung zweiter Art (*S. A. W.*, 1882, p. 919-936).

A. Adler. — Weitere Bemerkungen über Raumcurven 4 Ordnung zweiter Art (*S. A. W.*, 1882, p. 1201-1211).

A. Adler. — Ueber spezielle Raumcurven 4 Ordnung zweiter Art (*S. A. W.*, 1882, p. 1212-1229).

Milinowski. — Zur theorie der Raumcurven 4 Ordnung erster Art (*Crelle*, 1884, p. 277-316).

A. Brambilla. — Sulla curva gobba del 4° ordine dotata di punto doppio (*R. I. L.*, 1884, p. 857-866).

A. Brambilla. — Le omografie che mutano in sé stessa una curva gobba razionale del 4° ordine (*R. I. L.*, 1887, p. 780-797).

G. Pick. — Ueber Raumcurven 4 Ordnung erster Art und die zugehörigen elliptischen Functionen (*S. A. W.*, 1889, p. 556-563).

Rohn. — Die Raumcurve 4 Ordnung zweiter Species (*B. G. L.*, 1890, p. 208-244; 1891, p. 1-23).

J.-C. Kluyver. — Sur les tangentes d'inflexion d'une courbe biquadratique gauche de première espèce (*C. A.*, 1891, p. 346-380).

J. C. Kluyver. — Application géométrique des formes binaires (*N. A. W.*, 1893, p. 97-99).

C. Michel. — Sur une classe de quartiques gauches unicursales [référence à P. Appell, 1876] (*N. A.*, 1907, p. 289-296).

H. Brocard.

4819 (**1918**, 28) (M. Cassin). — *Équations de Fermat* (**1918**, 93). — 1° On sait que si un nombre M est représentée par une forme quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$ dans laquelle $\Delta = b^2 - ac$ est < 0, les nombres $x = u_n$ et $y = v_n$ sont des éléments d'un déterminant,

produit de la forme

$$\begin{vmatrix} u_n & u'_n \\ v_n & v'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} -D' & B' \\ C' & -A' \end{vmatrix},$$

et que u_n et v_n satisfont à la loi de récurrence

$$T_n + T_{n-2} = (\alpha + \delta) T_{n-1}.$$

Comme α, β, γ, δ sont indépendantes de M, il en est de même de cette loi.

2° L'existence de la loi de récurrence étant admise, on peut arriver à des résultats intéressants, sans utiliser les fractions continues.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad ux^2 - vy^2 = w.$$

Soient x_n, y_n une des solutions; x_0, y_0 et x_1, y_1 les deux plus petites solutions (faisant partie d'une même série). Cherchons s'il existe une relation de récurrence du type

$$(2) \qquad u_{n+2} + u_n = K u_{n+1},$$

à laquelle satisfassent x_n et y_n.

Soient α et $\frac{1}{\alpha}$ les racines de l'équation

$$x^2 - Kx + 1 = 0.$$

Si x_n et y_n satisfont à (2), on aura

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) x_n = \left(\alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}\right) x_1 - \left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right) x_0,$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) y_n = \left(\alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}\right) y_1 - \left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right) y_0.$$

Faisant la somme $ux_n^2 - vy_n^2$, il viendra après simplification

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 w = \left(\alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}\right)^2 w + \left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right)^2 w$$
$$- 2(ux_1x_0 - vy_1y_0)\left(\alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}\right)\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right).$$

Or

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = K.$$

et si l'on pose

$$A_n = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n},$$

A_n satisfait également à la loi de récurrence (2)

$$A_n + A_{n-2} = K A_{n-1}.$$

Il viendra donc finalement

$$w K^2 = w K A_{2n-1} - 2(u x_0 x_1 - v y_0 y_1)(A_{2n-1} - K)$$

ou

$$[A_{2n-1} - K][w K - 2(u x_0 x_1 - v y_0 y_1)] = 0.$$

Cette égalité sera identiquement satisfaite quelle que soit n, si

$$w K = 2(u x_0 x_1 - v y_0 y_1).$$

En particulier, si $u = 1$, $v = p$, $w = 1$, on a toujours

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 0,$$

d'où pour K la valeur simple

$$K = 2x.$$

C'est ainsi que pour l'équation $x^2 = 2y^2 + 1$, où $x_1 = 3$, la loi de récurrence est

$$t_n = 6 t_{n-1} - t_{n-2}.$$

Pour l'équation $x^2 = 3y^2 + 1$, on a

$$x_1 = 2$$

et la loi de récurrence est

$$t_n = 4 t_{n-1} - t_{n-2}.$$

Remarquons au passage que l'équation $x^2 + 1 = py^2$ n'est possible que si p est une somme de deux carrés.

3° Par une suite de calculs analogues au 2°, on démontrera que

$$2(u x_n x_{n+1} - v y_n y_{n+1}) = w K.$$

Dans le cas particulier $u = 1$, $v = p$, $w = 1$, $k = 2x$, il vient

$$x_n x_{n+1} - p y_n y_{n+1} = x_1.$$

Par exemple, pour l'équation $x^2 = 3y^2 + 1$, on aura

$$x_n x_{n+1} - 3 y_n y_{n+1} = 2,$$

4° Demeurant dans le cas particulier de l'équation $x^2 = py^2 + 1$, on a avec les notations du (2°)

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) x_n = \left(\alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}\right) x_1 - \left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right),$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) y_n = \left(\alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}\right) y_1,$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) y_{n-1} = \left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right) y_1.$$

Et puisque

$$x_1 + x_{-1} = \mathrm{K} x_0 = 2x_1.$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) x_{n-1} = \left(\alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}\right) - \left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right) x_1,$$

Par combinaison de ces égalités, on obtient les relations

$$x_n y_1 = x_1 y_n - y_{n-1},$$
$$y_n = x_1 y_{n-1} + y_1 x_{n-1}.$$

Ainsi, pour l'équation $x^2 = 3y^2 + 1$, où $x_1 = 2$ et $y_1 = 1$, on aura

$$x_n = 2y_n - y_{n-1},$$
$$y_n = 2y_{n-1} + x_{n-1}.$$

R. Ratat.

Autres réponses de MM. Cashmore (Londres), Despujols et Robellaz que nous transmettrons à M. Cassin dès qu'il nous aura fait connaître son adresse. LA RÉDACTION.

4835 (**1918**, 49) (*C. Boré*). — *Tables d'entiers sommes de deux carrés* (**1918**, 142). — Les Tables de M. Rignaux donnent lieu à une remarque sur la quasi équirépartition des nombres de décompositions :

1er mille.....	387	6e mille.....	395
2e »	391	7e »	392
3e »	392	8e »	391
4e »	391	9e »	390
5e »	386	10e »	392
		(10000 exclus).	

Un de nos collaborateurs nous dit : « Considérons les entiers $x, y \geqq 0$, tels que $x^2 + y^2 \leqq \mathrm{M}$; ils correspondent aux points à coordonnées entières, intérieurs au cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{M}}$. Quand M tend

vers l'infini, leur nombre a évidemment pour valeur asymptotique l'aire du cercle, soit πM. Sous une autre forme, on considère les nombres $0, 1, \ldots, (M-1)$, et on décompose chacun d'eux en somme de deux carrés; quand M croît indéfiniment, le nombre total N de ces décompositions a pour valeur principale πM, c'est-à-dire que

$$\lim \frac{N}{M} = \pi.$$

Les Tables de M. Rignaux donneraient $\lim \frac{N}{M} = 0,38$ ou $0,39$; mais elles ne considèrent pas comme distinctes les huit décompositions $(\pm x)^2 + (\pm y)^2$ et $(\pm y)^2 + (\pm x)^2$, en sorte qu'il faut multiplier $0,39$ par 8, ce qui donne $3,12$, nombre assez approchés de π.

La deuxième partie du traité de Bachmann, *Zahlentheorie*, consacrée à la théorie des nombres, et notamment aux valeurs moyennes, aux valeurs asymptotiques de certaines fonctions numériques (p. 397-484) pourront fournir les éléments d'une étude plus approfondie de l'équirépartition signalée. La Rédaction.

4836 (**1918**, 49) (*C Boré*). — *Nombre des décompositions d'un entier décomposable.* — La formule indiquée n'est pas distincte d'un résultat bien connu, qui remonte au moins à Gauss, et que l'on trouve exposé notamment dans P. Bachmann, *Niedere Zahlentheorie*, Erster Teil, Leipzig, 1902, p. 48). Elle s'écrit, avec la notation $t(\alpha) = \Pi(1+\alpha)$

$$D = \frac{1}{2} t(\alpha) + \frac{1}{4}[1 - (-1)^{t(\alpha)}].$$

Le texte de la question comporte une faute d'impression : $\Pi(1+\alpha)$ est *exposant* de (-1). *Is. Uber.*

4839 (**1918**, 50) (A. Colucci). — *Système*

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2, \qquad y^2 + z^2 = u^2, \qquad z^2 + x^2 = v^2, \qquad x^2 + y^2 = w^2.$$

Ce système revient à la recherche des parallélépipèdes rectangles dont les arêtes, les diagonales des faces et la diagonale centrale sont des nombres entiers.

Ce problème difficile n'a pas, à ma connaissance, été résolu. Il a déjà été posé deux fois dans cette revue :

Question 4343 (**1914**, 28). — Restée sans réponses.

Question 361 (**1894**, 214). — Réponses (**1895**, 174, 420; **1896**, 227; **1900**, 198).

Comme l'a indiqué M. Tannery, la démonstration de l'impossibilité du problème, tentée par M. Brocard, est insuffisante. Cette démonstration est basée sur une impossibilité de congruence suivant le module 10; on peut donner de nombreux exemples où cette congruence est satisfaite.

Deux procédés se présentent pour étudier le problème.

Premier procédé. — On commence par résoudre le système

$$y^2+z^2=u^2, \qquad z^2+x^2=v^2, \qquad x^2+y^2=w^2.$$

C'est le problème de Chabanel. *Voir* question 3823 (**1911**, 49); réponses (**1911**, 190, 256; **1912**, 111, 135). Les deux premières équations sont complètement résolues en prenant

$$y=mn(p^2-q^2), \qquad z=2mnpq, \qquad x=pq(m^2-n^2),$$

il reste alors

$$m^2n^2(p^2-q^2)^2+p^2q^2(m^2-n^2)^2=\square.$$

J'ai donné dans ma réponse à la question 3823, huit solutions générales simples de cette équation de condition; on peut en trouver beaucoup. Il reste ensuite à résoudre la condition

$$x^2+y^2+z^2=t^2,$$

mais les équations obtenues sont très complexes; je n'ai rien pu en tirer.

Deuxième procédé. — On commence par résoudre le système

$$x^2+y^2+z^2=t^2, \qquad y^2+z^2=u^2, \qquad z^2+x^2=v^2.$$

Les deux dernières sont complètement résolues en prenant

$$y=mn(p^2-q^2), \qquad z=2mnpq, \qquad x=pq(m^2-n^2);$$

d'où la condition

$$(m^2p^2+n^2q^2)(m^2q^2+n^2p^2)=\square$$

dont voici quelques solutions générales simples parmi beaucoup

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} m = 3\alpha\beta, & n = 2(\alpha^2+\alpha\beta), \\ p = \beta(2\alpha^2-\beta^2), & q = \alpha(\alpha^2-2\beta^2), \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} m = 3\alpha\beta, & n = 2(\alpha^2-\beta^2), \\ p = \beta(2\alpha^2+\beta^2), & q = \alpha(\alpha^2+2\beta^2), \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} m = \alpha^2-\beta^2, & n = 2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2), \\ p = \beta(2\alpha+\beta), & q = \alpha(\alpha+2\beta), \end{cases}$$

$$(\mathrm{IV})\quad \begin{cases} m = \alpha^4-4\beta^4, & n = 6\alpha\beta^3, \\ p = \alpha(\alpha^4+2\beta^4), & q = \beta(\alpha^4+\beta^4), \end{cases}$$

$$(\mathrm{V})\quad \begin{cases} m = \alpha(\alpha^4-6\alpha^2\beta^2-3\beta^4), & n = \beta(3\alpha^4+6\alpha^2\beta^2-\beta^4), \\ p = \alpha^4-6\alpha^2\beta^2-3\beta^4, & q = 3\alpha^4+6\alpha^2\beta^2-\beta^4. \end{cases}$$

Solution de *Crussol :*

$$(\mathrm{VI})\quad \begin{cases} m = \alpha(\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+5\beta^4), & n = \beta(\alpha^4-6\alpha^2\beta^2-3\beta^4), \\ p = \alpha^4-4\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3-3\beta^4, \\ q = \alpha^4+4\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3-3\beta^4. \end{cases}$$

Partant de l'une de ces formules, il reste à résoudre

$$x^2+y^2=w^2.$$

M. Rignaux.

4844 (**1918**, 74) (H. Brocard). — *Séries qui représentent e.*

M. E.-N. Barisien dans le *Periodico di matematica* (Anno XXIX, 1914, p. 238) trouve

$$e = 3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.2.6} + \frac{1}{1.2.3.7}+\frac{1}{1.2.3.4.8}+\frac{1}{1.2.3.4.5.9}+\ldots\right)$$

et il démontre que cette série est plus rapidement convergente que la série classique

$$e = 2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots.$$

A. Colucci (Caserte).

4858 (**1918**, 97) (Prompt). — *Table de Pythagore* (**1919**, 27). — La table de Pythagore permet des constatations nombreuses, dont plusieurs peuvent se déduire du principe ci-après :

Supposons que, dans une telle table, on considère tous les

groupes de nombres inscrits dans un carré, le premier de ces nombres étant sur la grande diagonale (1, 4, 9, 16, ...) et supposons également, que, pour abréger le discours, on appelle carré de rang m celui dont le premier terme est m^2 et carré de grandeur n celui qui enveloppe n^2 termes.

Cela admis, la somme de tous les nombres inscrits dans un carré de rang m et de grandeur n est égale à

$$\left[\frac{(2m+n-1)n}{2}\right]^2.$$

Conséquences. — 1° La somme de tous les termes d'une table ordinaire (rang 1; grandeur n) est

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

2° La somme de tous les termes inscrits entre le carré de rang 1 et de grandeur n et le carré de rang 1 et de grandeur $(n-1)$ est n^3; ce qui fait voir, en passant, que tout cube est une différence de carrés, etc.

Pour d'autres propriétés intéressantes de la table de Pythagore, consulter *B. M. E.*, 15 juin 907, page 275, article de M. Barisien.

G. Lemaire.

4860 (**1918**, 98) (A. Colucci). — *Lieu géométrique* (**1919**, 30).

Observons d'abord que si la droite r est hauteur du triangle, la position du conjugué harmonique est indéterminée; la hauteur fait donc partie du lieu.

Dans le cas général, soient N le point où r coupe BC, A′ le milieu de BC, I et J les pieds des bissectrices intérieures et extérieures de l'angle BAC. Menons par I une parallèle à r qui coupe AA′ en R, menons RQ perpendiculaire à AI qui coupe BC en Q, la perpendiculaire abaissée de Q sur r coupe cette droite en M, conjugué harmonique de N par rapport à B′ et C′.

Il suffit de démontrer que la division BNCQ est harmonique. Or les triangles semblables A′IR à A′AN, A′AJ à A′RQ donnent

$$\frac{A'R}{A'A} = \frac{A'I}{A'N},$$

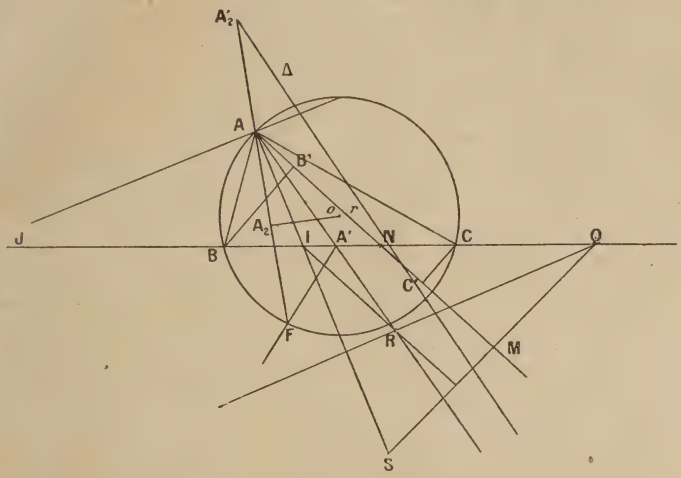
$$\frac{A'A}{A'R} = \frac{A'J}{A'Q},$$

et en multipliant

$$A'I.A'J = A'N.A'Q = \overline{A'C}^2.$$

Considérons d'une part la parabole tangente à BC et à AI et ayant

pour directrice la médiane AA′, d'autre part le triangle QIS (S point de rencontre de QM et de AI), nous voyons que ce triangle, qui a deux côtés tangents à la parabole, a son orthocentre R sur la directrice. Son troisième côté QM est donc aussi tangent à la parabole et le lieu de M est une podaire de cette parabole par rapport au point A de la directrice; c'est donc une « strophoïde oblique ».



Le foyer F de la parabole est sur la symétrique AA′ par rapport à AI et BC; c'est le point où la symédiane en A rencontre le cercle circonscrit. Le milieu A_2 de AF est le point d'origine des sécantes qui permettent de construire la strophoïde par points, et l'asymptote Δ parallèle à la médiane AA′ passe par A'_2 symétrique de A_2 par rapport à A.

On voit facilement que AM est bissectrice de l'angle BMC puisque le faisceau harmonique M(BNCQ) a deux rayons rectangulaires. Il s'ensuit que M est le lieu des points d'où l'on voit les côtés AB, AC sous des angles égaux; on peut le définir aussi comme le lieu des pieds des normales menées par A à un faisceau de coniques de foyers B et C.

Le point double de la strophoïde est en A, et les bissectrices de l'angle A sont les tangentes en ce point. La remarque précédente montre que la strophoïde passe par les centres isogones.

Si l'on considère les trois strophoïdes obtenues en partant successivement des angles A, B, C, ces trois courbes ont pour points communs, en outre des points cycliques, les trois sommets du triangle (dont un point double) et les deux centres isogones.

Elles n'ont donc pas d'autres points d'intersection.

L'équation en coordonnées normales de la strophoïde qui a son point double en A est

$$x(y^2 - z^2) + 2yz(y \cos B - z \cos C) = 0,$$

Cette courbe passe par le pied de la hauteur issue de A. On démontre aisément les propriétés suivantes :

La tangente au point B est parallèle à la droite qui joint A′ au pied de la hauteur issue de C.

La tangente au point A_2 (sommet du deuxième triangle de Brocard) est parallèle à la droite qui joint F au point de rencontre de AA′ avec OA_2 (O centre du cercle circonscrit).

La strophoïde est droite quand l'angle de la médiane et de la symédiane est droit.

Quand le triangle BAC a ses côtés AB, AC égaux, la strophoïde se décompose suivant la médiane et le cercle circonscrit.

P. Poulet.

4866 (**1918**, 101) (G. Lemaire). — *Les bissectrices des angles d'un quadrilatère quelconque* ABCD *déterminent un quadrilatère inscriptible* MNPQ.

« *Sait-on construire* ABCD, *connaissant* MNPQ? »

Le problème est indéterminé, puisqu'on ne fournit que quatre éléments et qu'il en faut cinq pour construire un quadrilatère. On peut le vérifier également de la façon suivante :

Soient AMN, BNP, CPQ, DQM les bissectrices; A, B, C, D étant les points à construire sur MN, NP, PQ et QM.

En prenant A *arbitrairement* sur MN, on peut construire deux quadrilatères répondant à la question : en effet, en menant AB quelconque, puis BC tel qne $\widehat{ABC}$ ait NP pour bissectrice, puis CD tel que $\widehat{BCD}$ ait PQ pour bissectrice, puis DA′ tel que $\widehat{CAD'}$ ait QM pour bissectrice, on voit que A et A′ (sur MN) se correspondent homographiquement, et qu'il y a par conséquent deux positions de B correspondant à A′ en A. Les quadrilatères ABCD s'en déduisent.

P. Hendlé.

Remarque préliminaire. — Si le problème est possible, il est indéterminé, car étant donné un polygone, si l'on mène des parallèles à ses côtés à une distance algébrique constante, on obtient un nouveau polygone ayant les mêmes bissectrices que le premier en position.

Analyse. — Soit ABCD le quadrilatère cherché; les bissectrices de A et de B se coupent en M, celles de C et de D en P. AD et BC se coupent en S. $\widehat{M}$ et $\widehat{P}$ sont supplémentaires. Si par exemple, M est aigu et P obtus, M est le centre d'un cercle exinscrit à SAB, P est le centre du cercle inscrit à SCD; MP est donc la bissectrice de $\widehat{S}$. MP, DP et CP sont donc trois bissectrices concourantes du triangle SCD. D'où la construction suivante :

Construction. — Prenons arbitrairement S sur MP. Les deux droites issues de S et faisant avec MP l'angle $P - 1^{dr}$ coupent les quatre bissectrices données en A, B, C, D.

Synthèse. — P est sur la bissectrice de S et $DPC = 1^{d} + \frac{S}{2}$. Donc P est le centre du cercle inscrit à DSC. D'autre part

$$AMB = 2^{dr} - DPC = 1^{dr} - \frac{S}{2}$$

et M est sur la bissectrice de S. Donc M est le centre d'un cercle exinscrit à SAB. Donc MNPQ, est bien le quadrilatère formé par les bissectrices de ABCD.

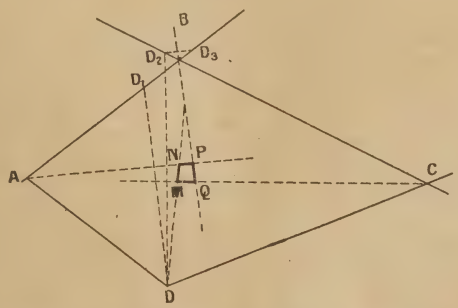
Discussion. — S étant arbitraire, il y a une infinité de solutions.

Zéro.

La question posée est susceptible de la généralisation suivante : Tracer un polygone dont les angles admettent pour bissectrices les côtés d'un polygone donné.

1° *Bissectrices intérieures.* — Le polygone donné doit avoir plus de trois côtés ou les trois droites doivent être concourantes.

Fig. 1.



Pour le quadrilatère inscriptible MNPQ (problème proposé) la solution est immédiate : D étant un point de MN, le symétrique D_1

de D par rapport à AP est sur AB; D_2 symétrique de D par rapport à CM est sur BC; D_3 symétrique de D_2 par rapport à BP est sur AB; les points D_1 et D_3 déterminent AB et le quadrilatère cherché est ABCD, car MNPQ est inscriptible; on peut démontrer que MN bissecte l'angle D.

Soient généralement, dans un plan, n droites, numérotées dans l'ordre de succession des sommets I_1, I_2, ..., I_n. Soit A le premier sommet, pris sur I_1; le symétrique A_1, de A par rapport à I_2 est un point du second côté; A_1 est situé sur I'_1, symétrique de I_1 par rapport à I_2; de même, A_2 symétrique de A_1 par rapport à I_3 est un point du troisième côté, et est situé sur I''_1 symétrique de I'_1 par rapport à I_3, etc.

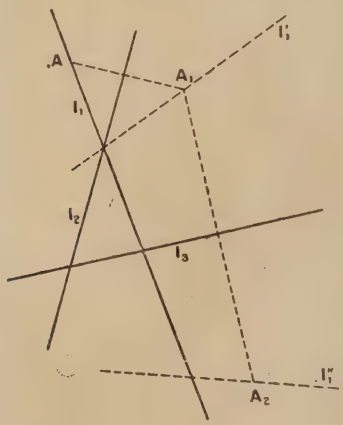
Ainsi le point A_n obtenu comme l'on voit ci-dessus est un point du premier côté AA_5, et A_n est situé sur la droite $I_1^{(n)}$ que l'on sait tracer.

La droite AA_5 joignant les points homologues de deux divisions homographiques enveloppe une conique C_1.

Si nous avions voulu déterminer le $n^{\text{ième}}$ côté en partant dans l'ordre I_1, $I_{(n)}$, $I_{(n-1)}$, ..., I_2 au lieu de l'ordre I_1, I_2, I_3, ..., I_n, nous aurions trouvé que ce côté était tangent à une conique C'_1.

Le premier et le $n^{\text{ième}}$ côté étant symétriques par rapport à I_1, soit donc la conique C''_1 symétrique de C'_1 par rapport à I_1 : le côté AA_5 est une tangente commune aux deux coniques C_1 et C''_1.

Fig. 2.



Si le quadrilatère MNPQ du problème proposé par M. Lemaire n'avait pas été inscriptible, le quadrilatère ABCD, n'aurait pas été convexe.

2° *Bissectrices extérieures.* — On peut remarquer que le polygone cherché est le polygone de périmètre minimum inscrit dans le polygone donné. En appelant *polygone de Fagnano* ce nouveau polygone, on a le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'inscription du polygone de Fagnano d'un polygone de n côtés donné puisse s'effectuer au moyen de la règle et du compas est :

1° *Que n soit impair, et dans ce cas il y a à choisir entre au plus n polygones;*

2° *Si n est pair,* $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \ldots, \widehat{A}_n$ *désignant les angles consécutifs du polygone donné, que ces angles satisfassent à la relation*

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 + \ldots + \widehat{A}_{\frac{n}{2}} = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_4 + \ldots \widehat{A}_n,$$

et, dans ce cas, il y a à choisir entre n séries de polygones isopérimètres.

Je serais désireux de posséder tous renseignements bibliographiques relatifs à ce problème. DESPUJOLS.

4874 (**1918**, 124) (P. HENDLÉ). — *Démonstration géométrique d'un théorème de Beltrami.* — Dans ses *Principes et développements de Géométrie cinématique*, Mannheim démontre *géométriquement*, p. 346, la généralisation du théorème de Beltrami donnée par Ribaucour et d'après laquelle le rayon de courbure géodésique d'une courbe à courbure normale constante vaut les $\frac{2}{3}$ du rayon de courbure géodésique de la section plane surosculée par un cercle ayant même tangente.

Mannheim démontre d'ailleurs géométriquement, p. 350, la formule classique de Laguerre, qui renferme le théorème de Beltrami comme cas très particulier. R. GOORMAGHTIGH (Ostende).

4875 (**1918**, 124) (H. BROCARD). — *Lieu des centres des sphères de rayon donné qui s'appuient sur deux cercles de l'espace.* — Les centres des sphères de rayon r qui s'appuient sur un cercle γ appartiennent au tore τ, enveloppe des sphères de rayon r ayant leurs centres sur γ; il en résulte que le lieu des centres des sphères de rayon r qui s'appuient sur deux cercles γ et γ', quelconques dans l'espace, est l'intersection de deux tores τ et τ', c'est-à-dire une courbe gauche du douzième ordre, car τ et τ' passent deux fois par le cercle imaginaire à l'infini.

Dans le cas où les cercles donnés γ et γ' sont symétriques par rapport à un plan p, les tores τ et τ' le sont également et leur intersection se compose, d'une part, de la quartique bicirculaire, section commune de p dans τ et τ', et, d'antre part, d'une courbe sphérique du quatrième ordre qui se projette suivant une ellipse sur un plan perpendiculaire aux plans de γ et γ'. Lorsque l'angle des plans de γ et γ' devient égal à π, la partie plane du lieu est une spirique de Perseus; lorsque, dans ce cas, la distance des centres de γ et γ' est égale à $2r$, la spirique est une ovale de Cassini; si, en outre, le rayon de γ est égal à $2r$, cette ovale devient une lemniscate de Bernoulli. R. Goormaghtigh (Ostende).

Courbe décrite par le centre d'une sphère de rayon constant, tangente à deux cercles symétriques par rapport à un plan. — Le lieu du centre d'une sphère de rayon constant, tangente à une courbe fixe, est une surface-canal ayant cette courbe pour axe.

Si la courbe est d'ordre p et rencontre en i points le cercle imaginaire de l'infini, la surface-canal est *en général* d'ordre

$$N = 4(2p - 1 - i)$$

et passe par le cercle imaginaire de l'infini un nombre de fois $k = \frac{N}{2}$.

(Exemples de cas de réduction : pour la droite, $N = 2$, $k = 0$; pour la parabole, $N = 6$, $k = 1$).

Donc, quand une sphère de rayon constant reste tangente à deux courbes d'ordre p et q, rencontrant respectivement en i et j points le cercle imaginaire de l'infini, son centre décrit en général une courbe d'ordre $8(2p - 1 - i)(2q - 1 - j)$.

C'est ainsi que, pour deux cercles quelconques ($p = q = i = j = 2$), on a deux tores (quatrième ordre) dont la courbe d'intersection est du huitième ordre. Mais si les deux cercles sont égaux et symétriques par rapport à un plan, comme dans la question posée, cette intersection se décompose, en une quartique plane bicirculaire dans le plan de symétrie, et en une biquadratique sphérique dont l'un des cônes du second ordre a pour sommet l'intersection des axes des deux tores. P. Hendlé.

QUESTIONS.

4919. [**A1a**] Soient D et δ deux polynomes entiers ordonnés en x et en y suivant les puissances décroissantes de x et croissantes de y, le degré de D en x étant supérieur à celui de δ.

La division de D par δ donnera alors un quotient B_1 et un reste U_1 ordonné de façon inverse.

On pourra donc diviser U_1 par δ écrit dans l'ordre inverse. On aura ainsi un quotient B_2 et un reste U_2.

1° Montrer que B_2 pourra être égal à $-B_1$ et qu'alors U_2 reproduira identiquement le polynome D.

2° Si cette identité ($R_2 = D$) ne se présente pas, on fera la division de U_2 par δ, et alors on aura un quotient B_3 et un reste U_3.

Montrer qu'il pourra arriver que U_3 soit identique, non à D, mais à U_1.

3° L'induction est-elle justifiée de prolonger la suite U_i (en inversant chaque fois δ) pour retrouver, non le polynome D, mais un des restes U_j déjà obtenus?

4° Si δ est seul ordonné en x et en y, et que D ne renferme que x, on retrouve D après deux divisions.

5° Il peut arriver qu'au cours des divisions se présente un reste U_i ne renfermant qu'une des variables x, et alors l'opération se terminera dans les conditions de l'article 4°.

6° Ces propositions ont-elles été déjà remarquées et signalées?

7° Est-il possible d'obtenir simplement des polynomes D et δ répondant aux conditions susmentionnées?

J'ai rencontré des polynomes D et δ pour lesquels la suite

des quotients B_i et des restes U_i m'a fourni les propriétés que voici :

Il arrive parfois d'emblée que $U_2 = D$, mais, plus généralement, que $U_3 = U_1$, puis, quelquefois, que $U_4 = U_2$; ensuite, plus rarement, que $U_5 = U_3$; enfin, exceptionnellement, que $U_{m+2} = U_m$, m étant 4, 5, 6 et au delà.

Il est entendu que l'inversion de δ s'impose et se trouve tout indiquée en raison de la nécessité que la division par δ puisse être commencée. δ demeure invariable, mais s'écrit chaque fois de façon inverse.

Cette division algébrique réitérée a-t-elle été déjà visée dans quelque ouvrage d'Algèbre? H. Brocard.

4920 [**M**^{3}**5** et **N**] Si l'on considère les cubiques gauches passant par quatre points fixes, que l'on prend naturellement pour sommets du tétraèdre de référence, et que l'on peut particulariser en les supposant placés à l'origine et aux points à l'infini de trois axes rectangulaires, la transformation

$$(1) \qquad Xx = Yy = Zz = Tt$$

fait correspondre à ces cubiques les droites de l'espace, et réciproquement. La forme

$$(2) \qquad x(u-a) = \lambda t, \qquad y = \ldots, \qquad z = \ldots$$

que prennent alors les équations de l'une des cubiques permet d'y définir et d'y étudier le rapport anharmonique de quatre points comme égal à celui des quatre points de la droite transformée.

De là résulte la théorie des complexes, congruences et surfaces qu'elles peuvent engendrer, et qui correspondent aux éléments analogues de l'espace réglé.

Parmi ces surfaces, j'ai spécialement étudié :

1° La transformée du plan, sur laquelle la géométrie de

ces cubiques rappelle par certains points la géométrie non euclidienne;

2° Les quadriques, qu'un choix convenable du tétraèdre de référence transforme en elles-mêmes, et sur lesquelles par suite la géométrie de ces cubiques reproduit celle des deux systèmes de génératrices rectilignes;

3° Les surfaces signalées par Darboux (*Théorie générale des surfaces*, 2e édition, t. I, p. 202)

$$x = A(\rho - a)^m(\rho_1 - a)^n, \qquad y = \ldots, \qquad z = \ldots$$

se réduisant pour $m = n$ aux surfaces tétraédrales de Lamé, et transformées par (1) en surfaces de même type;

4° Les surfaces de translation (Darboux, *Ibid.*, p. 137) engendrées par deux familles distinctes ou identiques de ces cubiques;

5° La surface transformée de la développable des tangentes à une cubique, et dont celle-ci devient une arête de rebroussement rectiligne.

Pour abréger le langage, je propose de désigner ces cubiques sous le nom de *tétraédro-cubiques*, rappelant à la fois leur définition et leur caractère de courbes tétraédrales de Lamé. Mais, avant de publier mes recherches, je demande :

1° Si elles n'ont pas déjà reçu un autre nom;

2° Si elles n'ont pas déjà fait l'objet d'études ayant donné les résultats précédents ou d'autres. Louis Roche.

4921 à 4928. [**Q4b**α] (Σ) (S) Voici quelques résultats sur les carrés magiques, exhumés de mes souvenirs; les étudier, les préciser et les généraliser :

[Je serai heureux d'éditer ultérieurement les réponses détaillées qui me seront parvenues.]

4921. Il est facile, ayant *deux* matrices formées de

carrés parfaits, de trouver des carrés magiques en *nombres premiers tous* de la forme $4h+1$. A. Gérardin.

4922. Ayant *une* matrice composée de *carrés parfaits* et *une* autre de *triangulaires*, j'ai aussi trouvé des carrés magiques en *nombres premiers tous* de la forme $4h+3$.

A. Gérardin.

4923. Il est facile de trouver des carrés magiques en *nombres premiers*, tous $\equiv a$ (mod. 10), par exemple; ou autres problèmes analogues. A. Gérardin.

4924. Plus généralement, ayant composé deux matrices très simples, on trouve aisément des carrés magiques en nombres premiers quelconques, dont quelques-uns peuvent être imposés.

Exemples :

1	11	53	139
83	109	7	5
79	17	71	37
41	67	73	23

somme magique 204 dans les *dix* sens, et un autre à somme magique 563 dans les *douze* directions.

1	19	47	113	383
107	239	157	17	43
173	41	103	233	13
229	7	29	197	101
53	257	227	3	23

A. Gérardin.

4925. Ayant un carré magique quelconque, on peut trouver facilement un nombre k tel qu'en multipliant successivement chaque terme du tableau par k, puis prenant le résidu par rapport à un certain module p, on arrive à un

nouveau carré magique formé avec ces résidus, et sur lequel on réitère le procédé.

Exemples :

Sur un carré de côté 6, de module 37, $k = 3$ donne 16 solutions différentes, $k = 5$ ou 13 en donne 36 permutées entre elles. Chercher la valeur préférable de k pour diverses espèces de carrés magiques; voir ce que deviennent en ce cas les carrés à particularités...

J'ai dans mes archives de nombreux exemples; j'indiquerai simplement qu'en partant du carré à base 5, donné par la méthode indienne, j'arrive, avec $k = 3$, à un carré magique formé de cinq progressions arithmétiques, et à somme magique 85.

Avec $k = 2$, en partant d'un simple carré de Frenicle, on trouve de jolies séries; combien faudrait-il connaître de *solutions initiales différentes* pour obtenir toutes les solutions avec ce procédé ? A. Gérardin.

4926. Chercher et indiquer des matrices d'un nombre *pair* de côtés, donnant, dans chaque ligne, colonne ou diagonale, les $2n$ premiers chiffres, une seule fois.

Pour les *impairs*, la solution est évidente.

A. Gérardin.

4927. Je crois que Rilly avait trouvé un carré à somme magique 260, donné par la marche du cavalier; ce problème classique est-il bien possible ? Historique de la question.

A. Gérardin.

4928. Historique sur des chercheurs de *Magie* (correspondances, notes à communiquer, etc.) [Coccoz, Rilly, G. Tarry, Portier, Frolow, Beligne, Feisthamel, Jolivald...] (Question analogue *pour les mathématiciens* déjà parue dans *I. M.*). A. Gérardin.

Les réponses aux huit questions ci-dessus sont destinées

en principe à être transmises à M. Gérardin qui pourra les éditer, au moins en partie; mais un court résumé pourra en être publié dans l'*Intermédiaire*. LA RÉDACTION.

4929. [**H 2cγ et H 2**] 1° L'équation généralisée de Riccati

$$(1) \qquad y^2 + y' = F(x) \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

peut se ramener à deux quadratures quand on en connaît une solution.

Comment, étant donnée la fonction $F(x)$, peut-on d'après la forme de celle-ci découvrir assez simplement la solution indiquée dans tous les cours comme nécessaire pour ramener l'équation (1) aux deux quadratures classiques de l'équation de Bernoulli ?

Par exemple: quelle solution particulière satisfait à

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = a \cos(\omega x + \varphi),$$

où a, ω, φ sont des constantes? A quoi peut-on reconnaître que (2) ne peut être satisfaite que par des fonctions définies uniquement par des équations différentielles irréductibles à des quadratures, dans le cas où l'on ne pourrait trouver aucune solution particulière exprimable par quadrature?

2° Étant donnée une équation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

comment reconnaît-on qu'il n'existe aucune transformation qui permette de la ramener à des quadratures? (Le sens de ce langage pouvant rester à préciser.)

Sur les équations différentielles, je ne possède que les méthodes classiques usuelles; aussi je serais très heureux de tous les renseignements bibliographiques que je devrais à la bienveillance des collaborateurs de l'*Intermédiaire* (particulièrement pour les équations du premier ordre).

J. GOUTARD.

4930. [**H 12 e** α] Soit une suite récurrente d'échelle

$$a_0 u_{n+m} + a_1 u_{n+m-1} + \ldots + a_m u_n = 0 \; (a_0, a_1, \ldots, a_m \text{ entiers et fixes}),$$

on voit aisément que si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, lorsque n tend vers l'infini, a une limite finie bien déterminée, cette limite est une racine de l'équation

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0.$$

On peut déduire de cette proposition un moyen de calculer par approximation les racines réelles d'une équation algébrique de degré quelconque, ou du moins l'une d'entre elles.

Ce procédé a-t-il fait l'objet d'une étude méthodique ?

Lorsque les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sont des fonctions de n, existe-t-il ou peut-on espérer trouver un critérium permettant d'affirmer suivant la forme de ces fonctions que la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $n = \infty$, au cas où elle existe, est un nombre algébrique ou transcendant? P. Poulet.

4931. [**R 3**] Soient, dans l'espace, U et V deux axes dirigés et $\overline{AB}$ un vecteur. On fait successivement subir à $\overline{AB}$ une rotation de α autour de U, de β autour de V, de α autour de U, etc., et l'on désigne par $\overline{A^1_\alpha B^1_\alpha}$, $\overline{A^1_\beta B^1_\beta}$, $\overline{A^2_\alpha B^2_\alpha}$, ..., $\overline{A^n_\beta B^n_\beta}$ les différentes positions obtenues pour $\overline{AB}$.

1° Déterminer quelle est la position de $\overline{A^n_\beta B^n_\beta}$ lorsque n est déterminé.

Comme conséquences :

2° $\overline{A^n_\beta B^n_\beta}$ peut-il avoir une position limite pour $n = \infty$? Si oui, à quelles conditions?

3° Quelles doivent être les conditions initiales pour que $\overline{A^n_\beta B^n_\beta}$ coïncide avec $\overline{BA}$ (n déterminé) ?

4° On suppose α et β infiniment petits, quelle est la surface engendrée par $\overline{AB}$? (On peut remarquer que ce dernier déplacement est un cas particulier du déplacement instantané

le plus général d'une figure de l'espace, tel que l'a défini Mannheim dans sa géométrie cinématique).

5° Que deviennent les résultats obtenus si les rotations autour de U sont alternativement positives et négatives ?

6° Même question si le changement de signe des rotations s'applique séparément à chacun des axes.

G. Boulloud.

4932 [**K 14b**) On sait que les nombres F, S, A, des faces, des sommets et des arêtes d'un polyèdre convexe sont liés par la formule d'Euler :

$$F + S = A + 2.$$

Je désirerais connaître une méthode permettant de déterminer une limite maximum ou minimum de l'une de ces quantités, connaissant l'une des deux autres, à l'exclusion de la troisième. G. Boulloud.

4933. [**K 1**] Soit M un point quelconque de l'intérieur du triangle donné ABC. Si, comme l'indique la figure, on

Fig. 1.

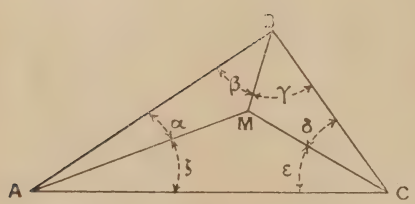
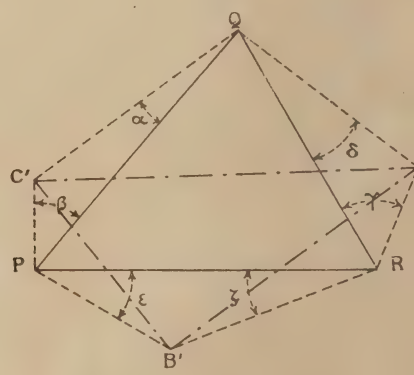


Fig. 2.



construit extérieurement, sur les côtés d'un second triangle PQR, les triangles PQC', QRA', RPB' semblables

à BAM, CBM, ACM, démontrer que les triangles ABC et A′ B′ C′ sont semblables, quel que soit le triangle PQR.

H. Koechlin.

4934. [Σ] (*Voir* **1907**, 146; **1908**, 218; **1909**, 75, 143; **1911**, 99; **1912**, 193). Prix académiques (Académie royale des Sciences exactes, physiques et naturelles de Madrid). Concours de 1919 : Exposé mathématique des modifications à apporter aux théorèmes et aux formules de la Mécanique générale, rationnelle ou théorique, et de leur influence sur les Sciences qui s'y appuient, et principalement sur l'Astronomie.

Concours de 1920 : Exposition théorique et pratique d'un travail important et original dans le champ de la Mathématique.

Mémoires en castillan ou en latin, avec devise, le nom de l'auteur sous pli cacheté spécial, à adresser au Secrétariat de l'Académie, calle de Valverde, n° 26, Madrid, jusqu'au 31 décembre (1919 pour le premier concours ci-dessus, 1920 pour le second).

(D'après l'Annuaire de ladite Académie, 1919, p. 358 et p. 359.) H. Brocard; La Rédaction.

4935. [**I 24 c**] La connaissance des nombres e^{π} et π^{e} donnerait peut-être l'indice de quelque relation entre e et π.

Pourrait-on en indiquer ici les valeurs approchées avec sept ou huit décimales exactes?

Il ne s'agit pas ici de relations où interviennent *les imaginaires*. H. Brocard.

4936. (SΣ) [**I 19 c**] Établir une liste de valeurs entières pour x, y, a, z, t dans le système

$$x^3 + ay^3 = z^2,$$
$$ax^3 + \quad y^3 = t^2.$$

Exemple :

$$x = 1, \quad y = 2, \quad a = 28, 136, \quad \ldots.$$

On peut aussi chercher des identités. A. Gérardin.

4937. (SΣ) [**I 19 c**] Résoudre en entiers le système

$$x^3 + ay^3 = z^3, \qquad ax^3 + y^3 = t^3.$$

Exemple :

$$a = 37, \quad x = 1, \quad y = 3,$$
$$z = 10, \quad t = 4.$$

A. Gérardin.

4938. [**B 1**] Je désirerais des renseignements bibliographiques au sujet du remarquable théorème de J. Hadamard sur les déterminants. On pourrait aussi caractériser chaque Mémoire en quelques mots. *Lacet.*

4939. [**I 19 c**] On sait que :

a. L'égalité $X^3 - Y^3 = KZ^3$ est possible chaque fois que K est un produit de *deux* entiers consécutifs ;

b. L'égalité $X^4 - Y^4 = KZ^2$ est possible chaque fois que K est un produit de *trois* entiers consécutifs.

A-t-on des exemples, pour des degrés supérieurs, du théorème suivant, dont les deux ci-dessus ne seraient que des cas particuliers :

L'égalité $X^n - Y^n = KZ^p$ (où p est le plus petit nombre premier divisant n) est possible chaque fois que K est un produit de $(n - 1)$ entiers consécutifs? Despujols.

4940. [**V**] Pourrait-on donner des renseignements sur de Cury et sur Fr. Moula? Ils ont publié quelques travaux mathématiques. M. Lecat (Bruxelles).

RÉPONSES.

314 (**1894**, 179) (P.-F. Teilhet). — *Dernier théorème de Fermat* (**1895**, 117, 359; **1905**, 11; **1906**, 99; **1913**, 151; **1916**, 127). — Un correspondant m'a adressé dans le cours de l'année 1918, successivement, plusieurs essais de démonstration du dernier théorème de Fermat. J'ai examiné le premier, qui était inexact. Un de nos dévoués correspondants, M. *Zéro*, a bien voulu lire les autres, comme il l'avait déjà fait antérieurement pour des essais analogues d'autres correspondants. Il a trouvé une fois de plus que les démonstrations présentées étaient insuffisantes. E. Maillet.

1241 (**1898**, 51) (É. Borel). — *Grammaire des mots maximum et minimum* (**1898**, 185; **1899**, 227, 275; **1900**, 202; **1908**, 278; **1914**, 105). — Les mots *maximiser* et *minimiser* ont été utilisés depuis longtemps, et ils le sont encore actuellement (par exemple, dans des *C. R.* récents).

Le terme *minimant* fut employé par J. Carvallo, *C. R. Acad. Sc.*, t. 49, 1859.

Certaines Encyclopédies universelles récentes s'expriment singulièrement au sujet de ces vocables. D'après l'une d'elles, « maximer » c'est « fixer le *prix* maximum » (!). Suivant une autre, minimant signifierait « qui *atteint* un minimum ». De telles erreurs, répandues par la voie de puissantes encyclopédies, doivent fatalement obscurcir les idées et retarder la diffusion de la terminologie commode adoptée par l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française). Néanmoins, cette terminologie commence à être suivie partout.

Ajoutons que le mot *minimité* fut utilisé au XVIIIe siècle, notamment dans l'*Encyclopédie* de Diderot, dans le sens, soit d'existence d'un minimé, soit de qualité de ce qui comporte un minimé. Exemple : principe de la minimité d'action (en Mécanique).

M. Lecat (Bruxelles).

2162 (**1901**, 219; **1916**, 125) (*H. Braid*). — *Chaînette*. — Sans répondre d'une façon complète à la question **2162**, on peut signaler

au sujet de l'équation de la chaînette mise sous la forme

$$(1) \qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

quelques particularités qui aideront peut-être à la résoudre.

L'équation ne figure pas à l'article « chaînette » de l'*Encyclopédie méthodique* (Paris, 1784; t. I, p. 338).

Dans son *Traité de calcul différentiel et intégral* (Paris, 1814, t. II, p. 458, 2e édition), S.-F. Lacroix discute et construit la courbe représentée par l'équation (1) sans indiquer, et probablement sans se douter, qu'il s'agit de la chaînette. A la fin de l'article, il ajoute : « La courbe que nous venons de considérer a été discutée par M. Schubert (*Nova acta Acad. Petrop.*, t. IX, p. 178), et jouit comme on voit de propriétés très remarquables dont plusieurs sont analogues à celles du cercle. »

D'où il suit que Schubert, lui aussi, n'a pas reconnu la chaînette dans l'équation (1) qui, par suite, ne devait pas encore être classique au commencement du XIXe siècle.

Mais dans ses *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la Géométrie* (Paris, 1828, p. 37), A. Cauchy emploie l'équation (1), en la considérant évidemment comme d'un usage courant à cette époque. F. Balitrand.

2223 (**1901**, 276) (P. Tannery). — *Signification de Géométrie à $\frac{1}{m}$ dimensions.* — Il est certain que notre esprit ne peut se représenter sous forme fractionnaire les éléments déterminatifs de l'espace. Nous concevons très aisément l'espace à deux et à trois dimensions, et nous commençons à nous familiariser avec les conceptions d'espaces à quatre dimensions, et même à n dimensions, n étant toujours un nombre entier. Cette notion d'hyperespace de degré n a été indéfiniment élargie et son extension à l'infini, proposée par Heyl en 1897, paraît avoir mis sur la voie d'une interpolation correspondant aux valeurs fractionnaires de n. C'est ce que je crois pouvoir conclure du paragraphe final du *Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions*, de Jouffret, 1903, p. 204-207. J'ignore si L. Hugo a donné lui-même un commentaire à son texte de 1875, mais il serait intéressant de savoir s'il a ainsi devancé de plusieurs années les suggestions de Heyl et de Jouffret. H. Brocard.

2242 (**1901**, 309; **1918**, 54) (V. Aubry). — *Principe des vitesses virtuelles.* — Sur ce sujet, on peut signaler l'article suivant, signé

A. C. (probablement Antoine Cournot) : *Extension du principe des vitesses virtuelles au cas où les conditions de liaison du système sont exprimées par des inégalités.* (*Bulletin des Sciences mathématiques de Férussac*, t. VIII, p. 165.)

F. Balitrand.

2277 (**1902**, 33; **1919**, 8) (*Canon*). — *Théorème de Chasles.* La relation de Chasles (*Aperçu historique*, p. 176) est une conséquence immédiate du théorème de Stewart et *demeure valable quand le point* E *n'est pas sur la même droite que les quatre points* A, B, C, D. En supposant l'axe ABCD orienté, on a, en effet,

$$\overline{EB}^2.\overline{CD}+\overline{EC}^2.\overline{DB}+\overline{ED}^2.\overline{BC}+\overline{BC}.\overline{CD}.\overline{DB}=0,$$
$$\overline{EC}^2.\overline{DA}+\overline{ED}^2.\overline{AC}+\overline{EA}^2.\overline{CD}+\overline{CD}.\overline{DA}.\overline{AC}=0,$$
$$\overline{ED}^2.\overline{AB}+\overline{EA}^2.\overline{BD}+\overline{EB}^2.\overline{DA}+\overline{DA}.\overline{AB}.\overline{BD}=0,$$
$$\overline{EA}^2.\overline{BC}+\overline{EB}^2.\overline{CA}+\overline{EC}^2.\overline{AB}+\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}=0.$$

Multipliant par $\overline{EA}^2$, $-\overline{EB}^2$, $\overline{EC}^2$, $-\overline{ED}^2$ respectivement et ajoutant, on obtient

$$\overline{EA}^2.\overline{BC}.\overline{CD}.\overline{DB}-\overline{EB}^2.\overline{CD}.\overline{DA}.\overline{AC}$$
$$+\overline{EC}^2.\overline{DA}.\overline{AB}.\overline{BD}-\overline{ED}^2.\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}=0.$$

Remarque. — Si l'on appelle α, β, γ, δ les puissances des quatre points A, B, C, D par rapport à un cercle quelconque de centre E, on a

$$\alpha.\overline{BC}.\overline{CD}.\overline{DB}-\beta.\overline{CD}.\overline{DA}.\overline{AC}+\gamma.\overline{DA}.\overline{AB}.\overline{BD}-\delta.\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}=0,$$

car si l'on remplace $\overline{EA}^2$ par $\overline{EA}^2-R^2$, $\overline{EB}^2$ par $\overline{EB}^2-R^2$, etc., il suffit de remarquer que le coefficient de $-R^2$ qui est la somme

$$\overline{BC}.\overline{CD}.\overline{DB}-\overline{CD}.\overline{DA}.\overline{AC}+\overline{DA}.\overline{AB}.\overline{BD}-\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}$$

est nul.

B. Niewenglowski.

2286 (**1902**, 36; **1919**, 8) (G. de Rocquigny). — La somme S des n premiers cubes impairs a pour valeur $n^2(2n^2-1)$.

Cela étant, la propriété énoncée est une conséquence immédiate du fait que tout nombre impair, sauf 1, 3, 5, 9, 11 et 17, est une somme de 7 carrés non nuls (*I. M.*, **1918**, 104).

En effet, si n est impair, S l'est aussi et est d'ailleurs supérieur à 17 pour $n > 1$. Si n est pair et contient 2 à la puissance k, $S = 2^{2k}N$, N étant un nombre impair différent d'ailleurs des six nombres donnés plus haut. La décomposition de S se ramène à celle de N, dont il suffira de multiplier chaque terme par 2^k.

Le corollaire est une suite immédiate de la proposition. D'ailleurs tout bicarré pair est aussi une somme de 8 carrés différents de o, puisque $16 = 3^2 + 7.1^2$. P. Poulet.

2314, 2316, 2317 (**1902**, 91; **1919**, 41) (G. Espanet). — *Propriétés des triangles trihomologiques et triorthologiques.* — L'étude proposée sera sans doute facilitée par des indications tirées de l'article de M. F. Daniels, intitulé : *Sur certaines identités vectorielles et leur interprétation dans la Géométrie sphérique et plane* (*Enseign. math.*, 1918, p. 97-122, et notamment p. 112).

H. Brocard.

2363 (**1902**, 143) (C. Störmer). — *Les meilleures constructions graphiques approximatives de la trisection de l'angle.* — En l'absence de réponse depuis dix-sept ans, si je me hasarde à en présenter une, c'est parce que je crois qu'elle pourra se trouver dans l'Ouvrage de Mitzscherling : *Das Problem der Kreisteilung*, 1913, analysé au B. D. 1914, p. 86-91, par M. G. Loria.

Il y est dit, en effet, page 89, que la trisection de l'angle est minutieusement étudiée avec évaluation du degré d'approximation.

H. Brocard.

2855 (**1904**, 285) (E. Maillet). — *Erreurs des mathématiciens* (*voir* **1914**, 83; **1914**, 152; **1915**, 13; **1917**, 57, 82). — G. Galilée (*Discordi e dimostrazioni*, Leide, 1638) commet une erreur dans une question sur la résistance des solides; elle est corrigée par G.-W. Leibniz (*Acta Erud.*, 1684, p. 321).

I. Newton (*Philosophiæ naturalis principia*, Londres, 1687) se trompe dans la solution du célèbre problème du mouvement des équinoxes. J. Landen (*Mathematical Memoirs*, Londres, 1780) indique la cause de cette erreur.

J.-L. Lagrange (*Mécanique analytique*, 2e édition, 2e Partie, Paris, 1815, Sect. VI, art. 7) et P.-S. de Laplace (*Mécanique céleste*, Paris, 1798, 1re Partie, Livre II, art. 57) commettent des erreurs au sujet d'une racine double d'une équation. La correction est faite par E.-J. Routh (*Treatise on the Dynamics, Stability of motion*, Londres, 1877, Chap. II, § 5) et par W. Thomson et P.-G. Tait

(*Treatise of natural Philosophy*, t. I, Cambridge, 1883, Part I, art. 343, 343 *m*, p. 376, 381).

P.-S. de Laplace (*Mécanique céleste*, Paris, 1798) se trompe en un point de la théorie des marées, ce que corrige W. Thomson (*P. M.*, 4e série, t. 50, 1875, p. 227), et (*Ibid.*) sur la résistance des rayons solaires, dans le système de l'émission, ainsi que le signale E. Liais (*Mém. Cherbourg*, t. 6, 1858, p. 216).

A.-L. Cauchy (1789-1857) commet une série d'erreurs (*Œuvres*, passim) signalées par miss J. Burns (*The Math. Monthly*, t. 20, 1913, p. 141-148).

Ph.-G. Pontécoulant (*Théorie analytique du système du Monde*, Paris, 1834) se trompe en de nombreux points. G.-J. Houel en corrige dans sa *Thèse*, Paris, 1855. U.-J.-J. Leverrier (*C. R. Acad. Sc.*, t. 9, 1839, p. 550) en rectifie d'autres.

Les auteurs (décédés) que nous signalons dans cette rubrique, comme ayant commis des erreurs, sont tous très éminents, la plupart même illustres, dans les sciences mathématiques. Il n'en est pas de même de F. Cartaud de la Vilate (1700-1737), et si nous citons cet auteur, c'est à titre exceptionnel. Ses *Pensées critiques sur les Mathématiques*, Paris, 1733, contiennent (p. 300-349), sur la Géométrie la plus élémentaire, des erreurs également exceptionnelles et au delà de toute idée. L'auteur concède que les Mathématiques sont établies sur de très bons fondements, mais il estime qu'on les idolâtre trop! Or, c'est en voulant saper ces fondements qu'il s'égare complètement. Ce Livre causa, paraît-il, à son auteur, après la publication, tellement de chagrin qu'il en mourut prématurément quelques années après.

Un Ouvrage qui a probablement une grande valeur documentaire au sujet des erreurs de mathématiciens, c'est celui de L. Navarro, *Errores en las matemáticas*, Salamanque, 1887. Nous n'avons pas réussi à nous le procurer. M. Lecat (Bruxelles).

3549 (**1909**, 98) (T. Lemoyne). — *Courbe Didonia* (**1909**, 216; **1914**, 85). — C'est W. Hamilton (*Lectures on Quaternions*, Dublin, 1853, p. 582) qui a proposé le nom de *courbe Didonia*.

Compléments bibliographiques : F. Brioschi, *Archiv. M. P.*, t. 8, 1857, p. 297 et s.; *Opere*, t. 1, Milan, 1901, p. 267; Aelt, *N. A. M.*, 1re série, t. 19, 1860, p. 100-103. M. Lecat (Bruxelles).

3719 (**1910**, 149) (M. Lecat). — *Bibliographie des déterminants à n dimensions* (**1911**, 281; **1913**, 9). — Cayley et Sylvester ont étudié ces déterminants, mais sous d'autres noms. Dans les travaux

suivants, ils les appliquent à la théorie des formes, sous le nom de *commutants*.

A. Cayley : *Cambr. M. J.*, t. 4, 1845, p. 199, 201-208 ; *Papers*, t. 1, Cambridge, 1889, p. 85-93 ; *J. Crelle*, t. 30, 1846, p. 7-10, 11-19 ; *Cambr. M. J.*, t. 7, 1852, p. 43-48, 51 ; *Papers*, t. 2, Cambridge, 1889, p. 19-23 ; *English Cyclopædia*, t. 5, 1860, p. 534-542 ; *Papers*, t. 4, Cambridge, 1891, p. 597, 599-600 ; *P.M.*, 4e série, t. 30, 1865, p. 411-413 ; *Papers*, t. 5, Cambridge, 1892, p. 495-497.

J.-J. Sylvester : *Cambr. M. J.*, t. 7, 1852, p. 75-95 ; *Papers*, t. 1, p. 305-25.

On peut s'étonner que ces deux mathématiciens illustres n'aient pas étudié les déterminants à n dimensions comme on le fait aujourd'hui. M. Lecat (Bruxelles).

3897 (**1911**, 169) (M. Lecat). — *Produit de déterminants de classes impaires* (**1912**, 257). — Le travail annoncé (**1912**, 258) comme devant paraître dans les *Mém. Acad. R. Belg.* et qui fut présenté à cette Académie dès 1912, n'a pu, faute de ressources, être imprimé avant la guerre. Pendant l'occupation allemande, le manuscrit a disparu ainsi que d'autres. Nous n'en avons pas le double ; mais cela n'a plus d'importance, car le théorème dont ce Mémoire donnait la démonstration est compris dans une savante théorie élaborée par L.-H. Rice, de Cambridge Mass., et publiée dans *Amer. J. M.*, 40 (1918), fasc. 3, de juillet, p. 246-257.

Rice s'inspire du théorème cité par nous (**1912**, 261) ; il le généralise, tout en simplifiant un peu les notations et le langage, grâce à une nouvelle extension de la notion de déterminant à n dimensions. Sans aller aussi loin que Rice, qui projette une vive lumière sur la question, nous avions eu la même idée dès 1915, mais les événements douloureux qui s'abattirent sur notre malheureux pays nous empêchèrent de rien publier à ce sujet, de sorte que la priorité de cette importante et difficile théorie appartient incontestablement à L.-H. Rice. M. Lecat (Bruxelles).

3929 (**1911**, 221) (*G. Quijano*). — *Série* $\zeta(x)$ (**1912**, 48, 143 ; **1913**, 181). — Bien qu'un peu tardivement, indiquons que la réponse de M. Bohren (Berne) mentionnée tome 19, 1912, page 48, se référait à la communication de son travail du 30 juin 1909 paru dans les *Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft* de Berne (Suisse), relatif aux sommes

$$\sum_{1}^{\infty} n \frac{1}{n^a} \quad \text{et} \quad \sum_{1}^{p} n \frac{1}{n^a}.$$

La Rédaction.

3939 (**1911**, 243) (H. Brocard). — *Liste de vaines annonces de publication* (**1913**, 107, 181). — Ch. Hutton, *Tracts*, Londres, 1812 (seul le Tome I aurait paru); J.-Fr. Pfaff, *Disquisitiones Analyticæ maxime ad calculum integralem*, Berlin, 1797 (id.); van Rees, *Corresp. M. P.*, t. 6, 1830, p. 283; V.-J. Bouniakowski, *Dictionnaire math. pures appl.*, s. l., 1839 (seul le tome 1 a paru); O. Schlömilsch, *Handbuch der mathematischen Analysis*, Iéna, 1845 (id.); C.-E. Lundström, *Nova Acta R. Soc. Sc. Upsal*, 3e série, t. 7, 1870, Mém. n° 4, p. 39. M. Lecat (Bruxelles).

4051 (**1912**, 169) (Gino Loria). — *Sur un problème de Géométrie énoncé par Lagrange* (**1912**, 288; **1913**, 107). — Une troisième solution, due à M. L. Ballif et intitulée : *Une application de la méthode de fausse position*, a été exposée dans l'*Enseignement mathématique*, 1914, p. 45-48.

Quant à la solution par les équipollences, rappelée ici (**1913**, 107) d'après G. Bellavitis, et publiée dans la traduction de M. Laisant (*N. A.*, 1873, p. 304-306), elle avait passé au même journal (1870, p. 131-133) sous la signature de L. Béziat.

Ces deux articles renferment toutes les références bibliographiques aux écrits de Lagrange. H. Brocard.

4215 (**1913**, 102) (J. Svoboda). — *Sur le théorème de Goldbach* (**1915**, 132, 278). — Comme suite à ma réponse parue en 1915 (p. 278), je crois utile de mentionner la Note de M. Viggo Brun, parue dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. **168**, 17 mars 1919, p. 544, et intitulée : *Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach*. L'auteur renvoie à un Mémoire plus développé, de même titre, présenté à la Videnskapsselskapet i Kristiania, le 24 janvier 1919. Parmi les résultats annoncés, mentionnons les suivants :

1° On peut écrire chaque nombre pair x, plus grand que x_0, comme la somme de deux nombres dont le nombre de facteurs premiers (différents ou non) ne surpasse pas 9.

2° Soit $Z(x)$ le nombre de couples de nombres premiers ayant pour différence 2 et inférieurs à x : on a, pour $x > x_0$,

$$Z(x) < \frac{100x}{(\log x)^2}.$$

E. Maillet.

4347 (**1914**, 31) (E.-N. Barisien). — *Aire du quadrilatère* IJKL *des pieds des normales issues d'un point* M(α, β) *à l'ellipse* E.—

Soit E l'ellipse ayant pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0\,;$$

on sait que parmi les coniques V passant par les quatre points I, J, K, L, se trouve l'hyperbole d'Apollonius

$$c^2xy - a^2\alpha y + b^2\beta x = 0\,;$$

mais on peut aussi étudier les deux paraboles P_1, P_2 passant par les mêmes points, comme l'a fait l'auteur de la question dans une de ses dernières communications (*N. A.*, 1917, p. 401-408).

On conçoit, pareillement, qu'il doive exister une relation entre les paramètres des deux coniques E, V et la surface du quadrangle IJKL. C'est ce que je suis porté à croire, d'après une étude de C. Leudesdorf dont je ne puis citer que le titre : *On the Area of the Quadrangle formed by the four Points of intersection of two Conics* (*Proceed. London math. Soc.*, t. 8, 1876-1877, p. 205-212).

Je pense que cette référence bibliographique pourra aider à la solution de la question. H. Brocard.

4385 (**1914**, 97) (F. Henroteau). — *Bibliographie du problème de Newton* (**1916**, 18, 81). — Compléments :

Jean Bernoulli, *Commercium phisos.-math.*, t. I, Lausanne et Genève, 1745, p. 463-470 (lettre à G.-W. Leibniz, du 7 août 1699);

N. Fatio de Duillers, *Fruit-walls improved, by inclining them to the horizon...*, Londres, 1699. particulièrement le paragraphe **2**;

J.-A.-J. Cousin, *Leçons de calcul différentiel*, t. I, Paris, 1777, p. 354;

H. Rigauder, *K. Vetensk. Akad. Handl. Stockholm*, t. 39, 1778; *K. Schwed. Akad. Wiss. Abh.*, t. 40, 1778, p. 127;

P. Frisius, *Atti Accad. Sc. Siena*, t. 6, 1781, p. 157-158;

J.-C. Russell, *Report Brit. Assoc. Dublin*, 1835, éd. Londres, 1836, 2e Partie, p. 107-108;

A. Kneser, *Abh. Geschichte Math. W.*, t. 25, 1907, p. 29;

C. Lindeman, *Konjugierte Punkte bei Widerstandsaufgaben der Variationsrechnung. Dissertation*, Breslau, mai 1917.

M. Lecat (Bruxelles).

4343 (**1915**, 171) (L. Mongardon). — *La canonnade et les conditions atmosphériques, et questions plus générales.* — Avant de se demander si la canonnade a une influence sur l'atmosphère, il conviendrait de dresser des statistiques ou de consulter des listes d'observations aussi probantes que possible.

Certaines coïncidences d'orages et de violentes canonnades ont donné quelque crédit à l'opinion assez répandue, que des explosions pouvaient influencer le temps, provoquer des manifestations électriques et favoriser la précipitation de grêle ou de pluie.

Sans remonter aux Etrusques et à leur docte nomenclature des foudres célestes, il est aisé de réunir quantité d'observations météorologiques donnant la preuve que des canonnades même violentes et prolongées sont demeurées absolument sans influence sur l'atmosphère. On a aujourd'hui cessé de croire à l'efficacité des canons paragrêles, dont on peut dire, comme du carreau de Vulcain :

Ce n'est qu'aux monts qu'il en coûte,
Bien souvent même il se perd,
Et ce dernier en sa route
Nous vient du seul Jupiter.

A moins que par aventure il n'existe des résultats formels sur le sujet susmentionné, je tiens pour inutile de tenter de poursuivre l'étude demandée. H. Brocard.

La question de M. Mongardon est d'un ordre plus précis que ne l'indiquerait la réponse de M. Brocard, puisque cette question vise « l'influence des trépidations sur la structure moléculaire des corps, notamment des liquides et des vapeurs ».

Pour ceux de nos lecteurs qu'intéresserait la question, d'actualité encore récente, de l'influence de la canonnade sur les conditions atmosphériques, il peut y avoir lieu de signaler diverses communications parues depuis quelques années dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, notamment de M. H. Deslandres, *Influence des canonnades intenses et prolongées sur la chute de la pluie*, 1er semestre 1917, t. **164**, p. 613, et G. Lemoine, *Observations* sur cette communication, p. 615.

Les canonnades de la guerre ont eu une durée, une étendue et une intensité inconnues auparavant. Il semble pourtant, eu égard à ce qu'on sait du phénomène des pluies *générales*, que l'on ne puisse guère attribuer à ces canonnades tout au plus qu'une influence locale ou régionale, et d'ailleurs de second ordre. E. Maillet.

4689 (**1916**, 220) (E.-N. Barisien). — *Orthographe* (**1917**, 47, 143). — Pour polynome, binome, trinome, etc., il n'est pas douteux, à mon avis, qu'il faille les écrire sans accent circonflexe. D'après l'étymologie grecque, polynome est fautif, bien qu'on l'écrive le plus souvent de cette manière. M. Lecat (Bruxelles).

4732 (**1917**, 49) (A. Gérardin). — *Impossibilité en entiers de l'équation*

$$4u(2p-3u)(u-p)=w^3 \quad (\mathbf{1918}, 18).$$

Posons

$$u-p=v, \qquad w=2t,$$

il vient

$$u(2v-u)v=2t^3;$$

on peut supposer u premier avec v, d'où $2v-u$ premier avec v et ne pouvant avoir avec u que le facteur commun 2; on a donc nécessairement l'une des trois décompositions :

$$\begin{array}{llll} u=2m^3 & 2v-u=8n^3 & v=l^3 & t=2mnl \\ u=8m^3 & 2v-u=2n^3 & v=l^3 & t=2mnl \\ u=m^3 & 2v-u=n^3 & v=2l^3 & t=mnl \end{array}$$

c'est-à-dire l'une des trois équations

$$l^3-m^3=4n^3, \qquad l^3-4m^3=n^3, \qquad 4l^3-m^3=n^3,$$

également impossibles, d'après Legendre, de même que l'équation plus générale

$$x^3+y^3=2^k z^2.$$

L. Aubry.

4823 (**1918**, 29) (G. Métrod). — *Impossibilité du système*

$$(1) \qquad x^2=3y^2+u^2,$$

$$(2) \qquad z^2=2y^2+u^2.$$

(**1918**, 94). — On peut supposer y premier avec u et (2) exige u impair et y pair, d'où

$$\begin{array}{lll} y=2mn, & x=m^2+3n^2, & \pm u=m^2-3n^2, \\ y=2pq, & z=p^2+2q^2, & u=\pm(p^2-2q^2), \end{array}$$

et par suite

$$m=ab, \qquad n=cd, \qquad p=ac, \qquad q=bd,$$
$$a^2b^2-3c^2d^2=\pm(a^2c^2-2b^2d^2)=\pm u \text{ (impair)},$$

d'où ac impair, b ou d pair, le premier membre $\equiv 1$ et le deuxième $\equiv \pm 1$ (mod. 4); on a donc le signe supérieur et il vient

$$b^2(a^2+2d^2)=c^2(a^2+3d^2),$$

mais puisque u est premier avec y, il en est de même de a et d et de b et c; on a donc nécessairement

$$a^2 + 2d^2 = c^2, \qquad a^2 + 3d^2 = b^2,$$

c'est-à-dire que l'on retombe sur un système identique au proposé, mais qui doit être satisfait par des nombres beaucoup plus petits; or, ce système n'ayant pas de solution en petits nombres est donc impossible. L. Aubry.

4829 (**1918**, 30) (*V.-G. Tariste*). — *Sur l'équation* $N^3 - N = 6n^2$ (**1918**, 138). — La solution de cette équation se ramène bien à celle des trois systèmes

$$\begin{array}{lll} 2x^2 - m'^2 = 1, & 3z^2 - m''^2 = 2, & m' = m'' = y, \\ n'^2 - 3z^2 = 1, & 2x^2 - n''^2 = 1, & n' = n'' = y, \\ 2p'^2 - x^2 = 1, & 4p''^2 - 3z^2 = 1, & p' = p'' = y. \end{array}$$

Soit d'abord

$$2x^2 - y^2 = 1, \qquad 3z^2 - y^2 = 2,$$

d'où

$$3z^2 + y^2 = 4x^2, \qquad z = ml, \qquad 2x \pm y = m^2,$$

$$2x \mp y = 3l^2, \qquad \pm y = \frac{1}{2}(m^2 - 3l^2),$$

$$2 = 3z^2 - y^2 = 3m^2l^2 - \frac{1}{4}(m^2 - 3l^2)^2,$$

$$m^4 - 1 = 2\left[\frac{3}{4}(m^2 - l^2)\right]^2 = 2X^2,$$

ce qui exige, d'après Legendre,

$$X = 0, \qquad m = l = 1, \qquad y = 1.$$

Soit maintenant

(1) $$y^2 - 3z^2 = 1,$$

(2) $$2x^2 - y^2 = 1,$$

y est impair et, par suite, z pair; on a donc

$$y \pm 1 = 2m^2, \qquad y \mp 1 = 6l^2, \qquad z = 2lm,$$

d'où

$$y = m^2 + 3l^2, \qquad \pm 1 = m^2 - 3l^2$$

et même

(3) $$1 = m^2 - 3l^2,$$

puisque m^2+1 ne peut être divisible par 3; l'équation (2) devient donc

$$2x^2 = y^2+1 = (m^2+3l^2)^2+(m^2-3l^2)^2,$$

d'où

$$x^2 = m^4+9l^4.$$

Soit d'abord m impair, on a nécessairement

$$m = ab, \qquad x-3l^2 = a^4, \qquad x+3l^2 = b^4,$$

d'où

$$3l^2 = \frac{1}{2}(b^4-a^4),$$

et à cause de (3),

$$1 = a^2b^2 - \frac{1}{2}(b^4-a^4),$$

$$1+b^4 = 2\left[\frac{1}{2}(a^2+b^2)\right]^2 = 2X^2,$$

ce qui exige, d'après Legendre,

$$X = b = 1, \qquad y = 1.$$

Soit maintenant m pair, on a

$$m = 2ab, \qquad x \mp 3l^2 = 2a^4, \qquad x \pm 3l^2 = 8b^4,$$

d'où

$$\pm 3l^2 = 4b^4 - a^4$$

et même

$$3l^2 = 4b^4 - a^4,$$

puisque $3l^2 - a^4$ ne peut être divisible par 4; (3) devient donc

$$1 = 4a^2b^2 - 4b^4 + a^4 = (a^2+2b^2)^2 - 8b^4,$$

d'où

$$b = pq,$$

$$a^2+2b^2 \pm 1 = 4p^4, \qquad a^2+2b^2 \mp 1 = 2q^4,$$

$$\pm 1 = 2p^4 - q^4,$$

ce qui exige encore, d'après Legendre, avec le signe inférieur $q = 1$, $p = 0$, et avec le signe supérieur $q = p = 1$, d'où

$$b = a = 1, \qquad m = 2, \qquad l = 1, \qquad y = 7.$$

Il reste donc à étudier le système

$$2y^2 - x^2 = 1, \qquad 4y^2 - 3z^2 = 1,$$

qui admet la solution $y = 1$, mais les méthodes précédentes ne réussissent plus. L. Aubry.

4830 (**1918**, 30) (H. Sebban). — *Sur diverses fonctions arithmétiques* (**1918**, 139; **1919**, 19). — M. *J. de Barinaga* a présenté au Congrès de Madrid (1913) pour l'Avancement des Sciences une très belle monographie sur ladite question et il a obtenu des formules $\Sigma(N)$ et $H(N)$. Il y a aussi des renseignements bibliographiques.

F. Vera (Madrid).

4851 (**1918**, 77) (L. Ropion). — *Millésimes à propriétés spéciales* (**1919**, 23). — Étant donné qu'il n'est pas possible de généraliser sans changer de système de numération, il est préférable de limiter le maximum de n à 7, nombre de jours de la semaine. L'omission de l'année 66 est une erreur de transcription ; cette année ne pouvait échapper à l'attention, comme on s'en rendra compte par la règle exposée ci-après.

En admettant que le nombre formé par les deux chiffres de droite d'un millésime représente le numéro de l'année ou rang qu'elle occupe dans le siècle, qu'on désigne sous le nom de *nombre séculaire* celui formé par les chiffres placés à la gauche des précédents et qu'on adopte la notation $n/n/n$ pour représenter le $n^{\text{ième}}$ jour de la semaine correspondant au $n^{\text{ième}}$ jour du $n^{\text{ième}}$ mois, on a, avec la semaine commençant le dimanche, la règle résumée dans le Tableau suivant :

	Valeurs de n						
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Dans les années de rang nn, la date $n/n/n$ correspond aux nombres séculaires :							
Juliens m. de 7 + ...	4	0	0	3	4	0	2
Grégoriens m. de 4 + ...	3	1	1	–	3	1	2

On obtient alors facilement les millésimes suivants dont la loi de formation apparaît au premier coup d'œil :

Calendrier julien. — 1111, 1111111111, ..., 22, 22222222, ..., 33, 33333333, ..., 44444, 44444444444, ..., 555555, 555555555555, ..., 66, 66666666, ...

Calendrier grégorien. — 11111, 111111, ..., 3333, 33333, ..., 5555, 55555, 555555, ...

Du même coup on voit que le nombre des solutions reste peu élevé, même en considérant une suite de siècles très étendue.

Pour les valeurs 8 et 9 de n, les nombres séculaires juliens sont respectivement m. de $7+5$ et m. de 7, et les séculaires grégoriens m. de 4 et m. de $4+1$.

Remarque. — Du Tableau ci-dessus, on déduit que *lorsque le millésime d'une année grégorienne se termine par* 44, *le* 4/4 *n'est jamais un mercredi.* L. Ropion.

4853 (**1918**, 78) (J. Ser). — *Au sujet des contours fermés de périmètre et de surface donnés.* — Bien que l'énoncé de la question ne le spécifie pas, nous supposerons qu'il s'agit de contours sans nœuds, renfermant par conséquent une surface d'un seul tenant. Dans le cas contraire, il est en effet facile de voir qu'un contour, de longueur et de surface (algébrique) données, peut être enfermé dans un cercle de diamètre aussi petit qu'on le veut.

Cela posé, soient :

δ le diamètre du cercle de périmètre $2l$ $\left(\delta = \frac{2l}{\pi}\right)$;

et Δ le diamètre du cercle de surface s $\left(\Delta = 2\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right)$.

D'après la théorie des isopérimètres, on a forcément

$$\delta \geqq \Delta \qquad \text{et} \qquad l^2 \geqq \pi s.$$

1° Tout contour c, que l'on pourrait enfermer dans un cercle de diamètre Δ, aurait une surface inférieure à s; donc le diamètre minimum D cherché est au moins égal à Δ;

2° Tout contour c, dans lequel on pourrait inscrire un cercle de diamètre δ, aurait un périmètre supérieur à $2l$; donc le diamètre maximum d cherché est au plus égal à δ.

Il ne semble pas qu'on puisse préciser davantage dans le cas général. Nous allons examiner deux cas où la famille des contours c est particularisée.

Parallélogrammes. — Soit θ l'angle aigu de ses côtés adjacents. Le cercle inscrit de rayon minimum r et le cercle circonscrit de rayon maximum correspondent tous deux au cas du losange.

θ est alors minimum et l'on a

$$\sin\theta = \frac{4s}{l^2}, \qquad r = \frac{s}{l}, \qquad R = \sqrt{\frac{l^2 + \sqrt{l^4 - 16s^2}}{8}}.$$

La condition évidente $l^4 \geqq 16s^2$ est compatible avec la condition générale susindiquée $l^2 \geqq \pi s$.

R présente également un minimum pour le rectangle de surface s et de périmètre $2l$. On a alors $R = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - 2s}$.

Triangles. — Le rayon du cercle inscrit est constant et égal à $\frac{1}{l}$.

Le maximum et le minimum du rayon du cercle circonscrit sont les deux racines positives de l'équation suivante, dont la troisième racine est toujours négative :

$$\begin{aligned} &4s[4lR + s]^3 - l^4[4lR + s]^2 \\ &-18l^4 s[4lR + s] + l^4[4l^4 + 27s^2] = 0. \end{aligned}$$

La condition de réalité des racines positives est $l^4 \geqq 27s^2$, compatible avec $l^2 \geqq \pi s$. L'égalité correspond au triangle équilatéral, et l'on a alors deux racines égales $R = \frac{2s}{l}$, ou $4lR + s = 9s$. Cela nous conduit à poser $l^4 = 27ks^2$ et $4lR + s = 9su$, d'où l'équation très simple en u,

$$4u^3 - 3ku^2 - 6ku + k(4k + 1) = 0.$$

En posant

$$u = y + 1, \qquad k = x + 1,$$

on a

$$y^2(4y - 3x) + (3y - 2x)^2 = 0,$$

équation d'une cubique cuspidale et parabolique.

P. Hendlé.

4854 (**1918**, 79) (Prompt). — *Division de* 1918 *en carrés* (**1919**, 25). — J'ignore les solutions indiquées par M. Prompt. Comme l'a dit M. Goormaghtigh, le problème n'admet que 13 solutions : les 8 qu'il indique et les 5 suivantes :

$$\begin{aligned} &[(5) - (2, 4, 14)], \\ &-[(6) - (5, 9, 11)], \\ &-[(10) - (1, 11, 13)], \\ &-[(11) - (4, 10, 14)], \\ &-[(18) - (11, 13, 15)]. \end{aligned}$$

J. Pacé.

4876 (**1918**, 125) (H. Brocard). — *Faisceau des tangentes à une quintique.* — L'énoncé de la question doit être incomplet, car une quintique n'est pas, en général, de la 5e classe, mais seulement si elle a pour points singuliers cinq rebroussements, ou trois rebroussements et trois nœuds.

D'une façon générale, une courbe de genre g et d'ordre p est également de classe p, si elle présente

$$\varkappa = p - 2 + 2g \qquad \text{rebroussements}$$

$$\text{et } \delta = \frac{1}{2}(p-2)(p-3) - 3g \qquad \text{nœuds.}$$

Quant à la quintique, lieu du point M de la question 4814 (**1918**, 8) elle n'a que deux rebroussements (aux points cycliques) et, à l'origine, un point triple à deux branches tangentes, équivalent à quatre points doubles. Elle est donc de la 6e classe. P. Hendlé.

4887 (**1919**, 3) (N. R. Pehelharingtz). — *Construire un triangle dont on donne les projections du centre du cercle des neuf points sur les trois côtés.*

En prenant les homothétiques des projections en question par rapport au barycentre supposé connu, avec un coefficient d'homothétie égal à 4, on obtient les symétriques des sommets par rapport aux côtés opposés. On est donc conduit à la question 4757 (**1917**, 98; **1918**, 39) dont la solution dépend d'une équation du 7e degré et ne peut, par conséquent, pas être construite par la règle et le compas.

P. Hendlé.

4888 (**1919**, 3) (G. Boulloud). — *Quadrilatère complet.* — Soient

$$A = x\cos\alpha + y\sin\alpha - a = 0,$$
$$B = x\cos\beta + y\sin\beta - b = 0,$$
$$C = x\cos\gamma + y\sin\gamma - c = 0,$$
$$D = x\cos\delta + y\sin\delta - d = 0,$$

les équations des quatre droites constituant le quadrilatère complet.

Les seize centres de cercles inscrits et exinscrits dans les quatre triangles du quadrilatère se répartissent sur les douze bissectrices des angles, à raison de quatre par bissectrice, chacun d'eux étant à

la rencontre de trois bissectrices. Chacun d'eux peut s'exprimer par une équation de la forme $A = \pm B = \pm C$.

Cela étant, on peut grouper les seize centres en quatre groupes ainsi répartis :

$$(G_1)\quad \begin{cases} (A = B = C), & (A = B = D), \\ (A = C = D), & (B = C = D), \end{cases}$$

$$(G_2)\quad \begin{cases} (A = B = -C), & (A = B = -D), \\ (-A = C = D), & (-B = C = D), \end{cases}$$

$$(G_3)\quad \begin{cases} (-A = B = C), & (A = -B = D), \\ (A = -C = D), & (B = C = -D), \end{cases}$$

$$(G_4)\quad \begin{cases} (A = -B = C), & (-A = B = D), \\ (A = C = -D), & (B = -C = D). \end{cases}$$

Une deuxième répartition s'obtient en remplaçant, par exemple, D par — D, ainsi qu'il suit :

$$(\Gamma_1)\quad \begin{cases} (A = B = C), & (A = B = -D), \\ (A = C = -D), & (B = C = -D), \end{cases}$$

$$(\Gamma_2)\quad \begin{cases} (A = B = -C), & (A = B = D), \\ (A = -C = D), & (B = -C = D), \end{cases}$$

$$(\Gamma_3)\quad \begin{cases} (-A = B = C), & (-A = B = D), \\ (-A = C = D), & (B = C = D), \end{cases}$$

$$(\Gamma_4)\quad \begin{cases} (A = -B = C), & (A = -B = D), \\ (A = C = D), & (-B = C = D). \end{cases}$$

Or, il est aisé de voir, par la considération des angles au sommet, que chaque groupe forme un quadrilatère inscriptible dans un cercle. D'autre part, un cercle quelconque du groupe G est orthogonal à un cercle du groupe Γ. Ainsi, par exemple, le cercle circonscrit au quadrilatère G_2 est orthogonal au cercle circonscrit au quadrilatère Γ_3, car le premier est circonscrit au triangle qui a pour côtés $A + D = o$, $A + C = o$, $B + D = o$, et le deuxième au triangle qui a pour côtés $A + D = o$, $A + C = o$, $B - D = o$. Ces deux triangles ont deux côtés communs et leurs troisièmes côtés perpendiculaires ; leurs cercles circonscrits sont donc orthogonaux

Il s'ensuit que les quatre cercles du groupe G ont même axe radical, que cet axe est la ligne des centres des cercles du groupe Γ et réciproquement.

Les cercles du groupe G ont pour équations

$$(G_1)\qquad (A-B)(C-D)\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\delta}{2}$$
$$-(A-C)(B-D)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}=0,$$

$$(G_2)\qquad (A+D)(B+C)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\delta}{2}$$
$$-(A+C)(B+D)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\delta-\alpha}{2}=0,$$

$$(G_3)\qquad (A+B)(C+D)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\delta}{2}$$
$$-(A+C)(B+D)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=0,$$

$$(G_4)\qquad (A+D)(B+C)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}$$
$$-(A+B)(C+D)\cos\frac{\alpha-\delta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=0,$$

qu'on peut encore écrire

$$(G_1)\qquad (AB+CD)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}$$
$$+(AC+BD)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\delta}{2}$$
$$+(AD+BC)\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\delta}{2}=0,$$

$$(G_2)\qquad (AB+CD)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}$$
$$+(AC+BD)\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\delta}{2}$$
$$-(AD+BC)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\delta}{2}=0,$$

$$(G_3)\qquad (AB+CD)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}$$
$$-(AC+BD)\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\delta}{2}$$
$$+(AD+BC)\sin\frac{\alpha-\delta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}=0,$$

$$(G_4)\qquad (AB+CD)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}$$
$$-(AC+BD)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\delta}{2}$$
$$-(AD+BC)\cos\frac{\alpha-\delta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=0.$$

Sous cette dernière forme, on vérifie aisément que trois cercles ont même axe radical en formant le déterminant des coefficients de $AB + CD$, $AC + BD$, $AD + BC$; ce déterminant est nul. Les équations des cercles du groupe Γ se déduisent des précédentes en remplaçant D par $-D$ et δ par $\delta + \pi$.

Les équations développées sont assez compliquées; voici celle de l'axe radical du groupe Γ, ligne des centres du groupe G.

$$
\begin{aligned}
x\Bigg[& \frac{a\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)} + \frac{b\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2}}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\delta)} \\
& + \frac{c\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2}}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma+\delta)} + \frac{d\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2}}{\sin(\delta-\alpha)\sin(\delta-\beta)\sin(\delta-\gamma)}\Bigg] \\
+y\Bigg[& \frac{a\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)} + \frac{b\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2}}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\delta)} \\
& + \frac{c\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2}}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma-\delta)} + \frac{d\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2}}{\sin(\delta-\alpha)\sin(\delta-\beta)\sin(\delta-\gamma)}\Bigg] \\
& + \frac{(ab-cd)\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\delta)} \\
& + \frac{(ac-bd)\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\delta)\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma-\delta)} \\
& + \frac{(ad-bc)\sin\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\delta-\beta)\sin(\delta-\gamma)} = 0.
\end{aligned}
$$

L'équation de l'axe radical du groupe Γ se déduit de la précédente en remplaçant d par $-d$ et δ par $\delta + \pi$.

Il est à remarquer que si les quatre droites données sont tangentes à un même cercle, l'un des cercles des deux groupes se réduit à un point qui est le centre du cercle inscrit. Les trois autres cercles du même groupe passent par ce point. P. Poulet.

4894 (**1919**, 5) (M. Rignaux). — *Parcours semi-magiques du cavalier aux échecs.* — La réponse complète est fournie par trois Notes du général T. Parmentier, publiées dans l'Annuaire de l'A. F. A. S. :

1° Marseille, 1891, avec figures de 93 parcours;

2° Pau, 1892, avec figures de 17 parcours;

3° Caen, 1894. Tableau chronologique des 110 parcours, avec les noms et pseudonymes d'auteurs, échelonnés de 1848 à 1892.

H. Brocard.

4896 (**1919**, 5) (Despujols). — *Identités arithmétiques.* — Soit

$$(b) \qquad dM^4 - N^4 = C^2;$$

on a identiquement, quel que soit d,

$$A = N^4 + dM^4, \qquad B = 2CMN,$$
$$Q = C^4 - 4dM^4N^4,$$
$$A^4 - dB^4 = Q^2.$$

Soit

$$(c) \qquad P^4 - dQ^4 = 2W^2, \qquad \text{ou} \qquad M^4 - 4dN^4 = V^2;$$

on a identiquement

$$A = W, \qquad B = PQ, \qquad Z = \frac{1}{2}(P^4 + dQ^4),$$

ou

$$A = V, \qquad B = 2MN, \qquad Z = M^4 + 4dN^4,$$
$$A^4 + dB^4 = Z^2.$$

L. Aubry.

4897 (**1919**, 6) (Despujols). — *Théorèmes d'analyse indéterminée.* — *a.* Je connais les identités suivantes :

$$(x^2 + 2x - 1)^4 - (x^2 - 2x - 1)^4 = (x - 1)x(x + 1)[4x^2 + 4]^2.$$

Exemples :

$$x = 2, \qquad 7^4 - 1^4 = 1.2.3.20^2,$$
$$x = 4, \qquad 23^4 - 7^4 = 3.4.5.68^2,$$
$$x = 5, \qquad 17^4 - 7^4 = 4.5.6.26^2$$

et

$$(2x^2 + 4x + 1)^4 - (2x^2 - 1)^4 = x(x + 1)(2x + 1)[8x^2 + 8x + 4]^2.$$

A. Gérardin.

Soit

$$K = m^3 - m,$$

on a identiquement

$$X_1^4 - X_2^4 = KC^2,$$
$$X_1 = m^2 + 2m - 1, \qquad X^2 = m^2 - 2m - 1,$$
$$c = 4(m^2 + 1).$$

En particulier, si $A^2 - nB^2 = 1$ et $K = nA$, on a pour $m = A$,

$$X_1^4 - X_2^4 = KC^2,$$
$$X_1 = A^2 + 2A - 1, \qquad X^2 = A^2 - 2A = 1,$$
$$C = 4B(A^2 + 1).$$

L. Aubry.

4898 (**1919**, 6) (Despujols). — *Équation indéterminée.* — Pour trouver des solutions en nombres entiers ou rationnels de la quartique

$$(1) \qquad y^4 + 6(3\lambda^2 - 8\mu)y^2 + 9\lambda^2(9\lambda^2 - 16\mu) = c^2,$$
$$\lambda = p^2 + q^2, \qquad \mu = (p - q)(p^3 - q^3).$$

Supposons d'abord

$$p = 2, \qquad q = 1,$$

d'où

$$y^4 + 2.57y^2 + 25425 = c^2 = (y^2 + 57)^2 + 22176.$$

En posant

$$4\alpha\beta = 22176$$

ou bien

$$\alpha\beta = 5544,$$

on aura

$$c + y^2 + 57 = 2\alpha,$$
$$c - y^2 - 57 = 2\beta,$$

d'où

$$\beta(\beta + 57 + y^2) = 5544$$

qui m'a donné

$$\lambda = 5, \qquad \mu = 7, \qquad y = 5, \qquad \beta = 44, \qquad \alpha = 126, \qquad c = 170.$$

Nous pouvons donc essayer en général la valeur $y = \lambda$; il reste alors à résoudre

$$25\lambda^2 - 48\mu = z^2$$

ou encore

$$-23p^4 + 48p^3q + 50p^2q^2 + 48pq^3 - 23q^4 = z^2$$

qui admet comme solutions

$$p = q, \qquad p = 2q, \qquad \ldots.$$

On peut donc poser, par exemple,

$$p = 2q + t$$

et chercher de nouvelles solutions, par les méthodes classiques, à l'infini.

Ces résultats donnent l'idée d'opérer de la façon suivante : L'équation (1) s'écrit

$$(2) \qquad [y^2 + (9\lambda^2 - 24\mu)]^2 + 288\mu(\lambda^2 - 2\mu) = c^2$$

ou encore, par exemple, guidée par la valeur de β précédemment trouvée,

$$c - y^2 - (9\lambda^2 - 24\mu) = 8(\lambda^2 - 2\mu),$$
$$c + y^2 + (9\lambda^2 - 24\mu) = 36\mu,$$

d'où

$$50\mu - 13\lambda^2 = y^2 = 37p^4 - 50p^3q - 26p^2q^2 - 50pq^3 + 37q^4,$$

où l'on peut poser $p = 2q + t$.

On arrive ainsi à la condition

$$25q^4 + 480q^3t + 562q^2t^2 + 196qt^3 + 37t^4 = y^2$$

qu'on sait résoudre.

Pour

$$y = 5q^2 + 48qt - \frac{871}{5}t^2,$$

on trouve

$$p = 484603, \qquad q = 189429, \qquad t = 105745,$$

d'où y et c.

On peut encore indiquer un moyen élémentaire, facile et méthodique, pour trouver des solutions.

Partant de (2), où λ et μ sont connus, il suffit d'écrire toutes les décompositions de $288\mu(\lambda^2 - 2\mu)$ sous la forme $A^2 - B^2$, et il n'y aura plus qu'à voir, sur une Table de Carrés, celles de ces valeurs telles que

$$A + 24\mu - 9\lambda^2 = y^2 \qquad \textit{ou bien} \qquad B + 24\mu - 9\lambda^2 = y^2$$

suivant le signe de $\lambda^2 - 2\mu$.

Autres solutions :

$$p = 3, \qquad q = 1, \qquad y = 36 = 6^2, \qquad c = 924,$$

$$p = 2, \qquad q = -1, \qquad \begin{cases} y = 45, & c = 1530, \\ y = 39, & c = 990, \\ y = 30, & c = 45. \end{cases}$$

On pourrait aussi étudier $y = \lambda \dfrac{f}{g}$.

A. Gérardin.

QUESTIONS.

4941. [**V**] Pietro Cossali, S. J., aurait publié un *Trattato sopra le figure isoperimetre*. Nous n'avons pas réussi à nous procurer cet Ouvrage (qui manque au *British Museum*), ni à obtenir aucun renseignement sur son contenu, ni même à connaître la date et la ville d'édition. Un mathématicien italien voudrait-il me renseigner succinctement?

M. Lecat (Bruxelles).

4942. [**H 9 d** et **H 10 d**] Je désirerais la liste des travaux où l'étude des fonctions harmoniques à quatre variables est faite au point de vue de la généralisation des fonctions d'une variable.

M. Lecat (Bruxelles).

4943. [**Q 3**] On peut considérer comme trois éléments d'une suite : la géométrie métrique, la géométrie projective et l'*Analysis situs*. Il n'y a guère plus d'une cinquantaine d'années, la géométrie projective était tenue pour qualitative, ce qui est inexact. Actuellement, tout le monde considère le troisième élément comme étant une géométrie d'où la quantité est complètement bannie et qui serait donc, elle, purement qualitative, bien qu'on y considère des nombres (les ordres de connexion). Peut-on affirmer, avec une certitude mathématique, que jamais un quatrième terme ne pourra être adjoint aux trois premiers de la suite, et que jamais, par conséquent, il ne sera question d'une géométrie plus purement qualitative que l'*Analysis situs?*

M. Lecat (Bruxelles).

4944. [**Q 2**] A-t-on étudié le polytope convexe, à $n+2$ di-

mensions, dont les $2^n + 2$ sommets sont les sommets d'un cube à n dimensions et les extrémités de deux perpendiculaires, chacune de longueur égale à l'arête, élevées sur l'espace du cube en deux sommets diamétralement opposés et dirigées suivant des dimensions $(n+1)^{\text{ième}}$ et $(n+2)^{\text{ième}}$? Pour $n=1$, on obtient un tétraèdre spécial. M. Lecat (Bruxelles).

4945. (Σ) [**B1d** et **B4**] Dans le Mémoire (*Journal de Crelle*, t. 30, 1846, p. 1) où il crée en quelque sorte l'Algèbre moderne, Cayley exprime certains invariants (*hyperdéterminants complets*) par un déterminant symétrique de déterminants de classe impaire n (qui sont des hyperdéterminants incomplets) (¹). Si, à l'indice *non permuté* (non-signant), on donne successivement les n rangs, on obtient n invariants. Pour $n=3$, l'illustre algébriste constate qu'ils sont les mêmes. Pour $n=5$, il les croit *indépendants*, mais n'a pu, dit-il (*loc. cit.*, p. 15) (²), s'en assurer.

Un beau sujet d'étude consisterait à combler la lacune du célèbre Mémoire, en recherchant, pour n impaire quelconque, les relations entre les déterminants exprimant ces invariants. M. Lecat (Bruxelles).

4946. [**V8**] La notion de *plus courte distance de deux*

(¹) Dans ce travail, Cayley appelle *hyperdéterminants* (mot hybride qu'il eût été peut-être plus correct d'écrire, avec un trait d'union, *hyper-déterminants*) les fonctions qu'il dénomme plus tard (*Cambr. Dublin Math. J.*, t. 7, 1852, p. 43), avec Sylvester, *intermutants*, et qui constituent un cas spécial de ce que Sylvester appela, à la même date, *invariants* (terme adopté depuis lors). Noter que les « hyperdéterminants incomplets » de Cayley sont des *péninvariants*.

(²) Cet écrit contient la traduction française d'un Mémoire anglais paru dans le *Cambr. Math. J.* (t. 4, 1845, p. 143), et reproduit dans les *Papers* (t. 1, Cambridge, 1889, p. 80). Mais cette traduction, qui n'est pas insérée dans les *Papers*, est très libre et renferme des additions assez importantes, dont l'une concerne le cas $n=5$. C'est donc au seul *Journal de Crelle* que le lecteur se reportera, en prenant garde aux nombreux errata glissés dans la composition de cet écrit.

droites non situées dans le même plan est aujourd'hui si répandue qu'on serait tenté de penser qu'elle est très ancienne. Il n'en est rien. Quelques recherches que je fis pour en déterminer l'origine me portent à penser qu'elle ne remonte pas plus haut qu'à Legendre, qui l'a exposée dans la Note VI de ses *Éléments de Géométrie*. Toutefois, comme il est bien possible que cette conclusion ne soit du tout définitive, je demande si cette notion se rencontre chez quelque auteur antérieur à Legendre. Gino Loria (Gênes).

4947. [**S4b**] On sait que le Soleil est entièrement gazeux. A quelle distance, en rayons solaires, son rayonnement calorifique est-il suffisant pour réduire et maintenir en vapeurs les métaux les plus réfractaires dont la présence a été constatée par l'analyse spectrale? Quelle est la température correspondante, en milliers de degrés? Et par quels moyens la vérifier? H. Brocard.

4948. [**V1aα**] Je suis demeuré de longues années sans avoir entendu de définition ni rencontré d'Ouvrage qui la donnât de ce qu'est la *perspective aérienne*.

J'ai fini par la connaître, mais je désirerais encore l'indication de quelque imprimé, aisé à trouver, qui fît mention de cette perspective. C'est cependant une locution d'usage courant, et qui gagnerait à être plus vulgarisée qu'elle ne le semble actuellement. H. Brocard.

4949. [**I3**] A-t-on recherché, pour les racines primitives des nombres premiers, quelque chose d'analogue à la loi de réciprocité des restes quadratiques? Autrement dit, a-t-on résolu les questions suivantes : p et q étant premiers, si p est racine primitive ou non de q, à quelles conditions q est-il ou n'est-il pas racine primitive de p?

G. Métrod.

4950. [**M'5b**] Si l'on prend comme triangle de réfé-

rence le triangle équilatéral des points de rebroussements, en coordonnées normales, l'équation de l'hypocycloïde à trois rebroussements prend la forme simple

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 0.$$

Cette forme a-t-elle été remarquée? Ne se prêterait-elle pas à une étude commode de cette courbe? A. Boutin.

4951. [**I 19**] Quelles relations doivent exister entre a et b (non carrés) pour que les deux équations de Fermat

$$x^2 - ay^2 = 1,$$
$$z^2 - by^2 = 1$$

puissent être satisfaites simultanément? en dehors de la solution banale

$$x = z = 1 \qquad (y = 0).$$

A. Boutin.

4952. [**J 1**] Combien y a-t-il de permutations de m objets admettant n inversions? G. Métrod.

4953. [**B 1**] Les éléments d'un déterminant d'ordre n sont ± 1; quelles sont les valeurs que peut avoir ce déterminant? Combien y a-t-il de déterminants ayant une valeur donnée? G. Métrod.

4954. [**O 2**] La courbe orthoptique de la parabole du second degré est une droite (sa directrice).

Je désirerais savoir s'il y a d'autres courbes jouissant de cette propriété. R.-S. de Beires.

4955. [**M' 1**] G. Salmon (*Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, 2e partie, 1891, p. 62, trad. Chemin) dit que, pour représenter une courbe de l'espace par des équations il suffit de prendre les trois courbes planes

qui sont les projections de la courbe sur *trois* plans de coordonnées.

Cette proposition ne comporte-t-elle pas de cas d'exception? Si elle en comporte, quelles indications ont-elles déjà été données à ce sujet? *Derennes.*

4956. [**L' 16**] Soient

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 b_1 x_2 x_3 + 2 b_2 x_3 x_1 + 2 b_3 x_1 x_2 = 0$$

l'équation ponctuelle d'une conique en coordonnées trilinéaires barycentriques et

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + 2 B_1 x_2 x_3 + 2 B_2 x_3 x_1 + 2 B_3 x_1 x_2 = 0$$

son équation tangentielle.

A-t-on étudié les triangles que représentent les discriminants considérés comme des coordonnées

$$\begin{matrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_1 & B_3 & B_2 \\ B_3 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 ? \end{matrix}$$

A-t-on étudié les triangles obtenus par l'échange des coefficients, ce qui constitue, à proprement parler, une transformation de la conique

$$\begin{matrix} b_1 & a_3 & a_2 \\ a_3 & b_2 & a_1 \\ a_2 & a_1 & b_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} B_1 & A_3 & A_2 \\ A_3 & B_2 & A_1 \\ A_2 & A_1 & B_3 ? \end{matrix}$$

A-t-on étudié cette transformation qui semble devoir faciliter la recherche des propriétés du cercle de Brocard et courbes analogues? A. Auric.

4957. [**L¹16**] Soit, dans un système de coordonnées trilinéaires barycentriques, l'équation ponctuelle d'une conique

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 b_1 x_2 x_3 + 2 b_2 x_3 x_1 + 2 b_3 x_1 x_2 = 0$$

et soit

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + 2 B_1 x_2 x_3 + 2 B_2 x_3 x_1 + 2 B_3 x_1 x_2 = 0$$

son équation tangentielle (A_i, B_i étant les mineurs du discriminant).

A-t-on remarqué que les cinq points

$$\begin{array}{lll} 1, & 1, & 1 \quad \text{(barycentre)}, \\ a_1 A_1, & a_2 A_2, & a_3 A_3, \\ b_1 B_1, & b_2 B_2, & b_3 B_3, \\ a_1 b_1^2, & a_2 b_2^2, & a_3 b_3^2, \\ A_1 B_1^2, & A_2 B_2^2, & A_3 B_3^2 \end{array}$$

sont sur une même droite?

A-t-on étudié les propriétés de cette droite par rapport à la conique et à son adjointe? A. Auric.

4958. [**K2**] (S) Dans un triangle $A_1 A_2 A_3$ pris comme triangle de référence, les coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit O sont

$$\sin 2A_1, \quad \sin 2A_2, \quad \sin 2A_3.$$

Considérons les points O′, O″ dont les coordonnées sont obtenues par permutation circulaire

$$\begin{array}{ll} (O') & \sin 2A_2, \quad \sin 2A_3, \quad \sin 2A_1, \\ (O'') & \sin 2A_3, \quad \sin 2A_1, \quad \sin 2A_2. \end{array}$$

A-t-on remarqué que si Ω est le centre du cercle des neuf points et P le réciproque du pôle trilinéaire de la droite d'Euler OΩ, les quatre points O′O″ΩP sont sur une même droite où ils forment une division harmonique?

A. Auric.

4959. [**D 2**] On a

$$\frac{1}{\sin^{2n} x} = \frac{1}{x^{2n}} + \ldots + \frac{A}{x^2} + B + Cx^2 + \ldots.$$

Je désirerais l'expression en n du terme B indépendant de x?

$$\text{Pour } n = 1, \quad B = \frac{1}{3},$$

$$\text{» } n = 2, \quad B = \frac{11}{45} = \frac{11}{3^2.5},$$

$$\text{» } n = 3, \quad B = \frac{191}{945} = \frac{191}{3^3.5.7}.$$

A. Boutin.

4960. [**K 2**] Est-il possible, à l'aide de la règle et du compas, d'inscrire, dans un cercle donné, un triangle isoscèle, connaissant deux points des côtés égaux situés hors de la circonférence? A. Colucci (Caserte).

4961. [**V**] Bibliographie des roulettes et glissettes.
A. Colucci (Caserte).

4962. [**M'6**] On a deux cercles C_1, C_2 tels qu'il existe un quadrilatère inscrit à C_1 et circonscrit à C_2.

Démontrer que les points communs aux diagonales des quadrilatères inscrits à C_1 et circonscrits à C_2 engendrent une quartique. A. Colucci (Caserte).

4963. [**I17**] (S) Résoudre en entiers le système

$$x^2 + y^2 = A^2,$$
$$x + y^2 = B^2.$$

Exemple :

$$x = 288, \quad y = 34, \quad A = 290, \quad B = 38.$$

A. Gérardin.

4964. [**I17**] Résoudre en nombres entiers le système

$$\begin{aligned}(x-h)^3+(y+h)^3 &= \mathrm{A}\,m^3,\\ x^3 \qquad\quad + y^3 \qquad &= \mathrm{B}\,m^3,\\ (x+h)^3+(y-h)^3 &= \mathrm{C}\,m^3.\end{aligned}$$

Exemple :

$$h=1,\qquad x=165,\qquad y=178,\qquad m=7,$$
$$\mathrm{A}=29581,\qquad \mathrm{B}=29539,\qquad \mathrm{C}=29503.$$

A. Gérardin.

4965. [**I17**] (S) La forme trinome

$$\mathrm{N}=2^{4x+2}-2^{2x+5}+1$$

est le produit de deux formes symétriques de même espèce.

Exemple :

$$x=5,$$
$$\mathrm{N}=4.161.537=2241\times 1857=3^4\times 43\times 619.$$

A. Gérardin.

4966. [**I17**] (S) Trouver, à l'aide de deux variables, la valeur de x dans $\mathrm{N}=x^2+2y^2$, de façon que N soit le produit de deux facteurs de la forme $2y^2+1$.

Exemple :

$$41^2+2=(2.4^2+1)(2.5^2+1)=3^2\times 11\times 17.$$

A. Gérardin.

RÉPONSES.

675 (**1895**, 386 ; **1904**, 234) (C. Rabut). — *Diderot et les mathématiques* (**1907**, 9). — De l'intéressante réponse de M. Brocard, on peut conclure que les connaissances mathématiques de Diderot étaient superficielles. En général, ce littérateur n'aimait guère les sciences abstraites, qui, dit-il, « ont occupé trop longtemps et avec trop peu de fruit les meilleurs esprits ». Il préférait, semble-t-il, les sciences d'observation ou d'expériences, notamment la Chimie et la Physique.

Voici des citations qui pourront donner quelque idée des conceptions de Diderot sur la plus belle des sciences, et de l'état de ses connaissances mathématiques :

« En examinant toutes les propriétés d'une courbe, on trouve que ce n'est que la même propriété présentée sous des faces différentes. »

« Lorsque les géomètres ont décrié les métaphysiciens, ils étaient bien loin éloignés de penser que toute leur science n'était qu'une métaphysique. »

« La géométrie est la meilleure et la plus simple de toutes les logiques, la plus propre à donner de l'inflexibilité au jugement et à la raison.... La méthode géométrique, c'est la boussole d'un bon esprit, c'est le frein de l'imagination. »

Diderot trouve Newton et Leibniz « grands dans leur invention » (le calcul infinitésimal), « petits dans le mystère qu'ils en firent ».

L'*Encyclopédiste* ne craignit point de faire (en 1750) cette bizarre prédiction : « Avant qu'il soit cent ans, on ne comptera pas trois grands géomètres en Europe; cette science s'arrêtera tout court, où l'auront laissée les Bernoulli, les Euler et les d'Alembert. Ils auront posé les colonnes d'Hercule. »

Heureusement, cette sombre prophétie ne s'est pas réalisée : il suffit, pour s'en convaincre, de rappeler Ch. Hermite, H. Poincaré, G. Darboux : trois noms glorieux! Tout fait prévoir que les mathétiques ne seront jamais finies. Comme M. Laisant l'écrivit, en 1907, à feu Le Dantec (qui avait des idées analogues à Diderot) : « En

mathématiques, nous savons bien peu de choses...; il n'y aura jamais de science achevée [1]. » M. Lecat (Bruxelles).

689 (**1895**, 402) (G.-N. Niewenglowski). — *Bibliographie des systèmes centrés* (**1896**, 138; **1918**, 127). — Une nouvelle étude vient de paraître, due aussi à M. E. Turrière, et publiée par le Service géographique de l'Armée, intitulée : *Le problème des objectifs de longues-vues dans la Dioptrique contemporaine*. Paris, 1918, 149 pages in-8°, 2 planches.

Ce cahier renferme l'exposition des recherches de M. H. Harting et se termine par un article de M. H von Bohr (Iéna) : *Pour contribuer à l'histoire du verre d'optique*

C'est un exposé intéressant et instructif des progrès réalisés dans la taille des verres, qui n'est sortie de l'empirisme que depuis 1814.

Je le signale à l'attention des techniciens, pour qu'il soit complété par de nouvelles références, demeurées longtemps inaccessibles.

Il suffira, en effet, pour s'en convaincre, de parcourir rapidement, soit les Volumes tout récemment publiés des Procès-verbaux des séances de l'Académie des Sciences (avant l'institution, en 1835, des Comptes rendus hebdomadaires); soit plus simplement, l'analyse qui en a été présentée par M. A. Boulanger, au *Bulletin des Sciences mathématiques*, savoir :

Tome I, 1795-1799, 1914, p. 65-75;
Tome II, 1800-1804, 1914, p. 225-236;
Tome III, 1804-1807, 1916, p. 213-228;
Tome IV, 1808-1811, 1917, p. 29-41.

La lecture de ces analyses donnera déjà mainte preuve de communications très importantes au sujet de la taille et de l'agencement des verres d'optique.

Si l'on désire y ajouter des documents plus anciens, tirés aussi d'ouvrages français, je mentionnerai :

1° *I. M.*, question 1352 (**1898**, 219), Une machine de Descartes, réponse P. Tannery, **1899**, 46.

2° Un cryptogramme, non encore déchiffré, sous lequel Borelli a déclaré vouloir prendre date pour un perfectionnement apporté à la taille des verres d'optique. Voir *Journal des Savans*, 1676, et *S. Œ.*, t. 1, 1906, p. 48, question 33.

---

[1] Ces citations sont extraites d'un Ouvrage de 800 pages environ, qui doit paraître vers juillet 1919, et qui a pour titre : *Pensées sur la Science, etc.*, par M. Lecat.

Les progrès réalisés actuellement permettent d'affirmer que le secret de Borelli peut parfaitement demeurer dans l'oubli.

3° Une liste d'importantes indications publiée par M. A. Beck (*Viertel. der Natur. Gesells.* Zurich, t. 17, 1872), résumée *B. D.*, 1874, p. 36-37.

4° La nécessité de perfectionnements spéciaux pour les objectifs de la photographie. Voir *I. M.*, question 221 (**1894**, 116), réponse **1894**, 206-207.

5° Des études pour les objectifs de microscopes. Voir entre autres F. Wenham. Nouvelle formule pour un objectif de microscope (*P. R. S.*, London, t, 21, 1872-1873).

6° Différents mémoires de Bravais, parus au *Journal de Mathm.* (2), t. 1, 1856 (exposition et application de formules de Gauss). Voir *loc. cit.* et pour d'autres travaux du même auteur, *J. E. P.*, 1845; *Annales de Chimie*, 1851; etc.

7° On consultera aussi avec fruit l'Ouvrage de F. Casorati : *Les propriétés cardinales des instruments d'optique, etc.*, 1872 (*B. D.*, 1873, p. 65), et les études signalées dans une liste assez étendue, publiée par M. Ch. Henry (*B. D.*, 1880, p. 208).

H. Brocard.

832 (**1896**, 149; **1905**, 220) (G. Eneström). — *Guglielmo de Lunis.* — C'est le Traité d'algèbre de l'indien Aryabhatta que G. de Lunis, mathématicien italien du XIIIe siècle, aurait traduit en latin (non en italien); et c'est une copie manuscrite de cette traduction qu'on trouve à la Bibliothèque nationale de Florence.

M. Lecat (Bruxelles).

871 (**1896**, 174) (G. de Rocquigny). — *Puissances n consécutives à mêmes chiffres mélangés* (**1903**, 233). — La question est demeurée sans réponse depuis plus de vingt ans, et il paraît peu probable qu'elle en reçoive une. On pourra donc s'en tenir aux quatre couples de nombres signalés dans l'énoncé; la connaissance de nouveaux couples exigerait sans doute l'examen de Tables plus étendues que celles qui ont servi jusqu'ici.

Quant à en obtenir par des moyens théoriques, cela n'est guère à espérer.

H. Brocard.

1193 (**1898**, 2; **1908**, 242) (H. Brocard). — *Action scientifique de Bonaparte* (**1909**, 32, 125; **1912**, 177, 223). — Napoléon Ier semblait préférer les hommes de science aux littérateurs; il aurait écrit quelque part cette boutade : « Que les hommes de lettres sont bêtes! »

Parmi les sciences, il estimait surtout les mathématiques. Voici une pensée qui montre l'importance considérable qu'il leur attribuait : « L'avancement, le perfectionnement des mathématiques sont liés à la prospérité de l'État. »

A Bernardin de Saint-Pierre, qui ne devait pas être un aigle en analyse, l'illustre vainqueur d'Arcole lança un jour, au cours d'une discussion, cette apostrophe : « . . . apprenez le calcul différentiel, Monsieur, et vous lèverez vous-même vos ridicules objections ! »

Toutefois, Napoléon eut l'occasion de constater que les mathématiques ne suffisent pas à tout. Car ayant eu une désillusion quant au ministère de Laplace, il reprocha au célèbre auteur de la *Mécanique céleste* de « porter l'esprit des infiniment petits dans l'administration. » D'autre part, il trouve « dangereux pour des Français qui n'ont pas de fortune de leur donner des connaissances en mathématiques trop étendues. »

En ce qui concerne les aptitudes et les goûts de Bonaparte, voici une phrase significative : « Pensez-vous que si je n'étais pas devenu général en chef et l'instrument d'un grand peuple, j'aurais couru les bureaux et les salons pour me mettre dans la dépendance de qui que ce fût, en qualité de ministre ou d'ambassadeur? Non, non ! Je me serais jeté dans l'étude des sciences exactes, j'aurais fait mon chemin dans la route des Galilée et des Newton. » Peut-être y aurait-il lieu de regretter sa carrière militaire, toute éclatante qu'elle fût...? Mais cette question n'a guère de sens.

Ajoutons enfin que, suivant des témoignages dignes de foi, la mémoire de Napoléon, prodigieuse pour les faits et les détails topographiques, n'avait rien d'extraordinaire pour les nombres, les dates et les mots. Mais, comme l'a écrit H. Poincaré, cela ne prouve absolument rien contre le génie mathématique. M. Legat (Bruxelles).

1976 (**1900**, 360; **1915**, 28) (*H. Braid*). — *A. Smyters.* — C'est un Anversois obscur, au sujet duquel il est malaisé d'obtenir des renseignements. Né vers 1562, décédé après 1630, il fit paraître vers 1590 un autre traité d'Arithmétique : *Arithmetica of lÿfferboeck*, in-8°.

Plus tard, abandonnant la Science, Anthonius Smyters passe à la littérature. Vers 1610, il publie une traduction des *Proverbes* attribués à Salomon : *Salomons spreuken* (brochure in-8° que nous n'avons pas vue). Ensuite, un gros volume : *Epitheta, dat zyn bynamen oft tœnamen, beschreven door Anthoni Smyters van Antwerpen. Een Boeck* (*niet allenlÿck bequaem ende dienstlÿck voor alle die de Poëten-konste beminnen*) *maer oock om alle andere nederduytsche composicien te vercieren. Tot Rotterdam, By Jan van Waesberghe aen de Merck.* 1620. In-8° de 420 pages

(non paginé). Espèce de dictionnaire, qui donne notamment des renseignements sur des personnages célèbres (y compris les mathématiciens); cet Ouvrage imite *Les Épithètes* (Paris, 1571 et 1580), du littérateur français Maurice de La Porte (1530-1571).

M. Lecat (Bruxelles).

1978 (**1900**, 402; **1915**, 28) (*H. Braid*). — *Jan Raymaker.* — Le premier Ouvrage cité dans l'énoncé de la question (*Traicté d'Arithmetique*) eut une seconde édition, à Rotterdam, 1610 (volume in-8°, non paginé). Le deuxième Ouvrage eut aussi une seconde édition, chez H. Verdussen, à Anvers, 1603 (volume in-8°, non paginé), et une troisième chez Jan van Waesberghe, à Rotterdam, 1605. Ce seraient les seules publications de Jan Raymaker, au sujet duquel il nous a été impossible de trouver d'autres renseignements.

M. Lecat (Bruxelles).

2168 (**1901**, 221) (E.-B. Escott); 2733 (**1904**, 41) (A. Miola). — *Trisection de l'angle* (**1901**, 304; **1904**, 135; **1905**, 37; Suppl. mai, juin). — Complément bibliographique : Trischkévitch, *Nova Acta Acad. Petrop.*, t. 13 (1803), Hist., p. 41; Anonyme, *Quart. J. Science Liter. Arts*, Londres, première série, t. 19, 1825, p. 139-140.

M. Lecat (Bruxelles).

2286 (**1902**, 36; **1919**, 8) (G. de Rocquigny). — *Somme des n premiers cubes impairs.* — Cette somme : $n^2(2n^2-1)$ devient en posant $n = m+1$

$$n^2(2n^2-1) = (m+1)^2(2m^2+4m+1);$$

Il suffit de démontrer que l'expression $(2m^2+4m+1)$ peut toujours être mise sous la forme d'une somme de 7 carrés $\neq 0$.

D'après le théorème de Bachet, les quatre hypothèses suivantes peuvent être considérées :

1° $m = a^2$. — L'expression devient

$$2m^2+4m+1 = a^4+a^4+a^2+a^2+a^2+a^2+1;$$

2° $m = a^2+b^2$. — On obtient

$$\begin{aligned} &2m^2+4m+1 \\ &\quad = 2(a^2+b^2)^2+4a^2+4b^2+1 \\ &\quad = (a^2-b^2)^2+(a^2-b^2)^2+4a^2b^2+4a^2b^2+4a^2+4b^2+1; \end{aligned}$$

3° $m = a^2 + b^2 + c^2$. — Dans ce cas

$$\begin{aligned} &2m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 1 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ &\quad + (a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (b + c - a)^2 + 1; \end{aligned}$$

4° $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. — L'expression fournit directement

$$(a^2 + b^2 + c^2 + a^2)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 1.$$

Corollaire. — Il suffira d'ajouter n^2 à chacun des résultats obtenus, multiplié terme à terme par $(m+1)^2 = n^2$, pour avoir

$$2n^4 = \text{somme de 8 carrés} \neq 0.$$

J. Pacé.

2855 (**1904**, 28) (E. Maillet). — *Erreurs de mathématiciens* (*voir* la Table générale, p. 224, etc., et **1919**, 78). — B. Taylor (*Philos. Trans.*, t. 28, 1713, p. 26; *Methodus incrementorum*, Londres, 1715 et 1717, p. 88) commet une erreur dans une question se rattachant aux oscillations d'un fil. Elle est signalée par H. Burkhardt (*Encyklopaedie math. Wiss.*, t. 2, 1re série, Leipzig, 1914, p. 1060).

J. le Rond d'Alembert (*Mém. Acad. Berlin*, t. 3, 1747; *Opuscules math.*, t. 4, Paris, 1768, p. 65 et suiv.) discute un paradoxe relatif à l'intégrale de certain élément d'arc; ce que F. Mallet élucide et corrige (*K. Vetensk. Acad. Nyd Handl. Stockholm*, t. 3, 1782, p. 280-284).

J.-L. Lagrange [*Mélanges Philos. Math. Soc. Turin*, t. 4, 1766-1769, reproduit dans *Mécanique analytique*, 2e édit., t. 2, Paris, 1813, p. 112 (3e édit., p. 97)] commet une erreur d'attention dans la solution du problème des deux centres fixes. A. Cayley (*Quart. M. J.*, t. 2, 1858, p. 76-83; *Papers*, t. 3, Cambridge, 1890, p. 109) rectifie.

A. Cauchy (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Paris, 1821, p. 131) donne un théorème relatif à des séries de fonctions continues. Suivant N.-H. Abel (*Œuvres*, t. 1, Christiania, 1881, p. 224-225), il serait inexact, ou du moins comporterait des exceptions.

G. Mainardi (*Giorn. Ist. Lomb.*, t. 9, 1856, p. 397), erreur sur la surface dont les lignes de courbure sont des géodésiques. F. Brioschi (*Annali Sc. math. fis.*, t. 8, 1857, p. 308; *Opere*, t. 1, Milan, 1801, p. 271-272) la signale et la corrige.

L.-V. Turquan (*C. R.*, t. 92, 1881, p. 1200; *Ann. Soc. sc. Brux.*,

t. 7, B, 1883, p. 429-436; t. 8, B, 1884, p. 314-318), théorie complètement erronée sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Ch. Hermite le signale dans une lettre qu'il adresse à P. Dubois-Raymond (*Arch. Math. Phys.*, t. 24, 1915-1916, p. 290).

H. Poincaré (*C. R.*, t. 120, 1895, p. 758) se trompe dans l'interprétation de calculs relatifs à l'expérience de Foucault et Fizeau, sur le spectre cannelé. A. Schuster constate et corrige (*Ibid.*, p. 987).

M. Lecat (Bruxelles).

3189 (**1907**, 75) (*Zed*). — *Étude mathématique de la périodicité des crises économiques. Bibliographie.* — Peut-être trouvera-t-on les éléments d'une réponse, au moins partielle, dans les travaux suivants :

T.-E. Burton, *Financial crises and periods of industrial and commercial depression*, New-York, 1902 (in-12, 392 pages).

L. Pohle, *Bevölkerungsbewegung, Kapitalbildung und periodische Wirtschaftskrisen*, Göttingue, 1902 (in-8, 92 pages).

W. Sombart, *Arch. f. Sozialwissenschaft u. Sozialpolitik*, Tubingue, t. 1, 1904, p. 1-21.

M. Bouniatian, *Wirtschaftskrisen und Ueberkapitalisation. Eine Untersuchung über die Erscheinungsformen und Ursachen der periodischen Wirtschaftkrisen*, Munich, 1908 (in-8, VII + 188 pages).

C.-W. Disbrow, *Periodical financial panics; the cause and the remedy*, Saint-Louis, Finance Pub. (in-8, 79 pages).

M. Lecat (Bruxelles).

3938 (**1911**, 242) (G. Monnet). — *Bibliographie de la géométrie des masses.* — Il serait encombrant de publier ici une liste de travaux sur cette vaste question de Mécanique. On peut ajouter que ce ne serait guère utile. On consultera : *Royal Society of London Catalogue of Scientific Papers* 1800-1900. *Subject Index. Volume II. Mechanichs.* Cambridge, 1909, p. 66 et suiv.; pour les années postérieures à 1900, les volumes annuels de l'*International Catalogue of Scientific Literature, Mechanics*, Cambridge, 2e partie, sous le n° **0410**. Mais il y a mieux. On trouve, en effet, dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édit. française), au tome IV, vol. 2, fasc. 1, un excellent article, d'une centaine de pages, rédigé par E. Carvallo, d'après l'article de G. Jung, de l'édition allemande. Celui-ci, déjà fort riche au point de vue bibliogra-

phique, tant en ce qui concerne les Ouvrages que les Mémoires, date de 1903; celui de Carvallo, mieux documenté encore, est de 1912.

A cette occasion, serait-il bien exact, comme nous l'avons ouï dire, que l'édition française de l'*Encyclopédie* ne continuerait pas à cause de la guerre? N'était-il pas question, dès avant 1914, d'élaborer une édition anglaise, d'après les deux autres?

M. Lecat (Bruxelles).

4134 (**1912**, 266) (M. Lecat). — *Le principe d'Hamilton chez Clausius.* — Le fameux principe d'Hamilton en Mécanique a été étudié par Clausius dans les travaux suivants : *Ann. Phys. Ch.*, 2e série, t. 110, 1873, p. 106-130; *Sitzgsb. Niederrheinischen Gesellsch. Natur und Heilkunde Bonn*, t. 30, 1873, p. 136-154 (en allemand); *P. M.*, 4e série, t. 46, 1873, p. 236-244 et 266-276 (en anglais); *J. Liouville*, 2e série, t. 19, 1874, p. 193-220 (en français).

M. Lecat (Bruxelles).

4311 (**1913**, 267) (M. Lecat). — *Mathématiques appliquées à la Biologie. Bibliographie.* — Etude mathématique de l'incurvation des coquillages : *Philos. Trans.*, 1838, t. 2, p. 351 et suiv.; *Ann. Phys. Poggendorff*, t. 50, 1840; *Ann. Sc. natur. Zool.*, 2e série, t. 17, 1842, p. 94, 129 et 274. *Voir* aussi : A.-H. Grabau, *Dissertation*, 1872; J.-F. Blake, *Philos. Mag.*, 5e série, t. 6, 1878, p. 241-263.

K. Pearson (*Philos. Trans.*, 1896 et 1897) développe une théorie mathématique de l'évolution. Dans le remarquable discours *Sur la portée objective du calcul des probabilités*, qu'il prononça à l'Académie belge des Sciences, le 16 décembre 1903 (*Bull. Cl. sc.*, 1903, p. 1235-1294), P. Mansion (3 juin 1844-16 avril 1919) applique d'une manière ingénieuse ce calcul à des vues sur le transformisme. Dans ses *Leçons de calcul des probabilités* (Paris, 1916), ces intéressantes considérations sont reproduites en appendice (p. 391 et suiv.), avec de-ci de-là de petites additions. Notons celle-ci : « Il semble bien que les Mathématiques apporteront de plus en plus de lumière sur les deux évolutionnismes : sur celui de Darwin, par la loi binomiale de Quetelet; sur celui de Mivart, par l'intermédiaire des vues de Mendel... »

Un important travail est fourni par V. Volterra, *Dissertation*, publiée dans l'*Annuario Univ. Roma*, 1902.

Mais comme référence bibliographique fondamentale, il faut citer : H. Przibram, *Anwendung d. Mathematik auf biologische Probleme*, Leipzig, 1908, particulièrement l'appendice, p. 78-84.

Enfin, signalons que : Wentworth Thomson (*Trans. R. Soc.*

Edimb., t. 50, 1914-1915, part. IV, éd. 1916, p. 857-895) applique les Mathématiques à d'importantes questions morphologiques; O. Frank (*Sitzgsb. Akad. Wiss. München*, 1915, p. 289-315) à divers problèmes physiologiques; et M. Greenwood (*Nature*, Londres, t. 96, 1916) à l'épidémiologie.

Ces indications suffisent à montrer qu'après avoir envahi l'Astronomie, puis la Physique tout entière, ensuite la Chimie, l'Économie politique, etc., les Mathématiques pénètrent déjà sérieusement la Biologie, dans plusieurs de ses branches, qui les appellent de plus en plus à leur secours. Puissent les tenants des sciences de la vie ne pas reculer devant une étude sérieuse de la langue mathématique et ne plus se résigner à parler le vieux langage anthropomorphique !

M. Lecat (Bruxelles).

4435 (**1914**, 193) (J. de Vries). — *Symétrie de certains théorèmes géométriques* (**1917**, 112; **1919**, 13). — En parcourant les volumes du *Recueil de problèmes* de M. Laisant (t. 2 et t. 5, *Géométrie*) le lecteur ne pourra manquer de rencontrer plusieurs énoncés de propositions de la catégorie visée dans la question 4435.

Quelques extraits de ces répertoires, certains théorèmes classiques et diverses notes personnelles donneront ici les éléments d'une première liste, nécessairement bien incomplète, mais dont on peut soupçonner l'étendue.

La plupart de ces théorèmes se rencontrent dans la géométrie du triangle, du tétraèdre et de l'hyperboloïde réglé. J'en rapporterai seulement quelques exemples.

C'est ainsi que, dans la géométrie du triangle, il suffira de rappeler le contact du cercle d'Euler avec les cercles inscrit et ex inscrits (théorème de Feuerbach); la notion des groupes orthocentriques, dont chaque point est l'orthocentre du triangle des trois autres, ce qui est le cas des trois sommets et de l'orthocentre de tout triangle; et aussi des centres du cercle inscrit et des trois cercles exinscrits. Enfin, diverses propositions où interviennent les orthocentres des triangles formés par les côtés d'un quadrilatère pris trois à trois. Ces quatre points se trouvent sur une ligne droite, directrice de la parabole inscrite au quadrilatère, dont les diamètres sont parallèles à la newtonienne, ce qui montre que ces deux droites sont rectangulaires.

Dans la géométrie du tétraèdre, nous signalerons quelques propositions.

Lorsque, dans un tétraèdre, deux hauteurs se rencontrent, les deux autres hauteurs se rencontrent aussi (*N. A.*, 1859, p. 206-232).

Dans le tétraèdre : 1° les quatre hauteurs donnent lieu, prises

deux à deux, à six plus courtes distances parallèles aux six arêtes du tétraèdre; 2° les six plus courtes distances donnent lieu, prises deux à deux, à quinze plus courtes distances, dont douze sont nulles et les trois autres sont parallèles aux trois plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre (*N. C.*, 1877, p. 108; *N. A.*, 1884, p. 531).

Dans le tétraèdre : 1° les points où les arêtes d'une des faces sont rencontrées par les plans bissecteurs extérieurs des dièdres opposés sont en ligne droite; 2° cette droite est dans le plan déterminé par les points où les trois autres arêtes sont rencontrées par les plans bissecteurs intérieurs des dièdres opposés (E. Cesaro, *N. C.*, 1880, p. 90; *N. A.*, 1885, p. 481).

Enfin, dans un autre ordre d'idées, adoptant, pour abréger, la désignation de *quadruple hyperboloïdique* pour l'ensemble de quatre génératrices d'un hyperboloïde réglé, on a les propositions suivantes, la plupart bien connues :

1. Les quatre hauteurs d'un tétraèdre forment un quadruple hyperboloïdique (J. Steiner, *N. A.*, 1859, p. 350).

2. Un trièdre trirectangle étant circonscrit à une quadrique, les normales à cette surface aux points de contact des faces du trièdre et le diamètre qui passe par le sommet de ce trièdre forment un quadruple hyperboloïdique (A. Mannheim, J. Neuberg; *N. A.*, 1868, p. 331).

3. Dans un tétraèdre, les droites joignant les sommets aux centres des cercles inscrits dans les faces opposées et les droites joignant les sommets aux centres des symédianes des faces opposées forment deux quadruples hyperboloïdiques (J. Neuberg, *M.*, 1884, p. 190).

4. Soient A′, B′, C′, D′ les projections des sommets d'un tétraèdre ABCD sur un plan. Les perpendiculaires abaissées de A′, B′, C′, D′ respectivement sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC forment un quadruple hyperboloïdique (J. Neuberg, *M.*, 1888, p. 50).

5. Pour d'autres propriétés, en partant des mêmes données, voir aussi J. Neuberg, *J. S.*, 1891, quest. 306, demeurée non résolue, ce journal ayant cessé de paraître.

Pour un quadruple hyperboloïdique, voir encore Mathesis, **1910**, 41, à propos de la question 3714 (*I. M.*, **1910**, 147), à laquelle il a été donné ici plusieurs réponses.

Après avoir mentionné ces quelques exemples, est-il bien nécessaires d'en prolonger la liste? Cela est inutile, parce que la géomé-

trie des figures non pourvues de symétrie a sa source dans la symétrie, simple changement du point de vue ou du tableau. Combien de propriétés des triangles et des coniques, déduites de celles du triangle équilatéral et du cercle, avec, en plus, des propriétés nouvelles, comme celles des foyers et des directrices!

Une place importante paraît devoir être donnée aux formules de la trigonométrie rectiligne, car une multitude d'entre elles sont douées d'une remarquable symétrie, bien que s'appliquant à des triangles dépourvus de symétrie; et cela est d'autant plus vrai que la symétrie d'un triangle enlève très souvent toute symétrie aux formules trigonométriques.

Des énoncés symétriques se présentent aussi en Analyse, comme on l'a observé ici, à propos de la question 3002 (**1906**, 7), aux réponses (**1907**, 135, 276).

Voir encore MATHESIS, **1906**, 87, question 1269, et *N. A.*, 1855, p. 401-402. H. BROCARD.

4689 (**1916**, 220) (E.-N. BARISIEN). — *Orthographe* (**1917**, 47, 143; **1919**, 83). — La question, en ce qui concerne l'orthographe de *monome*, etc., a été posée sous le n° 1843 (**1900**, 159), par *Jean-Baptiste*. Il y a été longuement répondu (**1900**, 389). Il n'est pas douteux, d'après l'étymologie, qu'il faut omettre l'accent circonflexe.

M. LECAT.

4732 (A. GÉRARDIN). — *Solutions entières d'une équation biquadratique à coefficients rationnels ou entiers* (**1918**, 18; **1919**, 84). — *a*. Les quartiques proposées par M. Gérardin sont de la forme générale

$$E_4 = X_1^4 + aX_1^3X_2 + bX_1^2X_2^2 + cX_1X_2^3 + dX_2^4 = Z^2.$$

Cette expression devient un carré lorsqu'on y fait

$$X_1 = (a^2 - 4b)^2 - 64d,$$
$$X_2 = 8a(a^2 - 4b) + 64c.$$

Ces valeurs, pour la forme réduite obtenue en supposant, comme on le peut toujours, $a = 0$, deviennent

$$X_1 = b^2 - 4d,$$
$$X_2 = 4c.$$

b. L'identité ci-dessous définie est la plus simple qu'on puisse trouver. Au cas où par suite des valeurs des coefficients de E_4, X_1 serait nul sans pour cela que X_2 le soit (dans ce cas entrent les

quartiques traitées par Fermat, puis par Euler et Legendre), on peut néanmoins trouver une identité. La résolution de E_4 entraîne en même temps la résolution d'une seconde quartique

$$E'_4 = X'^4_1 + 3aX'^3_1 X'_2 + (3a^2 + b)X'^2_1 X'^2_2 + (a^3 + 2ab - c)X'_1 X'^3_2 + (a^2 b - ac + d)X'^4_2.$$

En lui appliquant les formules du paragraphe *a*, nous déterminons pour E'_4 des valeurs de variables qui seront nécessairement non nulles tant que X_2 sera différent de zéro.

En transportant ces valeurs de X'_1 et X'_2 dans les formules qui lient à X_1 et X_2, on a les valeurs cherchées. On trouve deux groupes de valeurs.

c. Les cas échappant à cette méthode sont ceux que définissent les conditions

$$a = 0, \qquad c = 0.$$

d. En appliquant les formules de récurrence relatives à cette quartique, et partant de la solution (X_1, X_2) déterminée ci-dessus, on obtient de nouvelles valeurs, fonctions seulement des coefficients, soit une série infinie d'identités, solutions du problème

$$E_4 = Z^2.$$

e. Lorsque, de l'équation $E_4 = KZ^2$, on possède une solution rationnelle, une transformation linéaire ramène la solution du problème à ne plus dépendre que de la résolutiou d'une quartique $e_4 = q^2$ à laquelle s'appliquent les considérations des paragraphes *a*, *b* et *d*; soit, en fin de compte, une série infinie d'identités, solutions de $E_4 = KZ^2$. Les quartiqués proposées possèdent une infinité de solutions.

f. Les substitutions

$$Z = -\frac{2p}{q}, \qquad M = \frac{2U}{q}$$

ramènent le problème

$$q(p - q)(3q^2 + 3pq - 2p^2) = U^2$$

à la cubique

$$Z^3 + 5Z^2 - 12 = M^2$$

qui appartient à une catégorie de problèmes posés par Euler (*Algèbre*, t. 2). Il s'agit de *carrifier* une cubique

$$X^3 + aX^2Y + \ldots + cY^3 = N^2$$

avec la condition qu'une des variables soit égale à une quantité σ donnée d'avance ($\sigma = 1$, dans les exemples d'Euler).

C'est à ce problème que se ramène la résolution de toute quartique

$$E_4 = KZ^2$$

lorsque E_4 possède une racine rationnelle. (Elle ramène au cas de $Y = 1$, traitée plus loin.)

g. L'hypothèse $X = \sigma$ ramène le problème à la quartique

$$\sigma V^2 = t^4 + 4at^3 + 2(3a^2 - b)t^2 + 4[a(a^2 - b) + 2c]t + [(a^2 - b)^2 + 4ac]$$

qu'on sait traiter (*voir* § *a* et *e*).

L'hypothèse $Y = \sigma$ amène à la cubique

$$R^2 = y^3 + \sigma^2 \frac{(3b - a^2)}{3} y + \left[\frac{8a^2\sigma^2}{27} + \frac{2a\sigma^3(a^2 + b)}{3} - (ab - c)\right].$$

Lorsqu'on possède une solution de cette cubique, et c'est le cas du problème de M. Gérardin, comme elle ramène toujours à une cubique de même forme, on engendre ainsi, arithmétiquement, une infinité de solutions. D'ailleurs, la forme elliptique du problème est immédiate.

Les deux cas ne sont pas distincts l'un de l'autre : chacun d'eux peut facilement se ramener à la forme de l'autre.

Dans le cas de $X = 1$, et tant que a et c ne sont pas nuls simultanément, le problème d'Euler est soluble directement par identités (*voir* § *a* et *b*).

Si a et c sont nuls, σ ne peut être qu'un carré parfait.

h. Les hypothèses que l'on peut faire sur les facteurs du polynome

$$4U(2p - 3U)(U - p) = w^3$$

ramènent à résoudre rationnellement

$$A^3 + B^3 = 4C^3,$$

problème qui fait l'objet de la question 4832 et de ma réponse à cette question. Le problème n'est donc pas possible en entiers.

DESPUJOLS.

4750 (1917, 78) (G. MÉTROD). — *Permutations*. — Cherchons

d'abord à préciser l'énoncé de la question qui présente quelque ambiguïté. Si nous disons, en effet :

Parmi toutes les permutations des n premiers nombres entiers, combien y en a-t-il telles que la différence en valeur absolue de deux termes consécutifs soit différente de l'unité?

Nous voyons que pour $n = 4$ les permutations 2413 et 3142 répondent à la question, alors que l'auteur affirme qu'il n'en existe pas. La question doit sans doute être ainsi comprise :

Parmi toutes les permutations des n premiers nombres entiers, combien y en a-t-il telles que la différence en valeur absolue de deux termes consécutifs ou des termes extrêmes soit différente de 1 *et de* $n - 1$?

L'avantage de ces restrictions supplémentaires est d'établir une symétrie parfaite entre tous les termes de la permutation. Le problème devient alors le même que le suivant :

Étant donnés n points sur un contour fermé, quel est le nombre des polygones que l'on peut former avec ces n points pour sommets, sans qu'aucun côté joigne deux sommets consécutifs sur le contour?

A chacun des polygones correspondent, en effet, $2n$ des permutations considérées.

Nous allons d'abord résoudre le problème ainsi posé; nous en déduirons, aisément du reste, la solution du premier énoncé.

Si nous appelons, pour abréger, *côté simple du polygone* un côté joignant deux sommets consécutifs, nous pouvons, d'une façon plus générale, chercher à calculer le nombre γ_n^k des polygones de n côtés, ayant k côtés simples, et le nombre Γ_n^k des permutations correspondantes, égal à $2n\gamma_n^k$.

Voici le Tableau de ces valeurs pour $n = 11$:

n.	γ_n^0.	γ_n^1.	γ_n^2.	γ_n^3.	γ_n^4.	γ_n^5.	γ_n^6.	γ_n^7.	γ_n^8.	γ_n^9.	γ_n^{10}.
2.....	0	0	1	"	"	"	"	"	"	"	"
3.....	0	0	0	1	"	"	"	"	"	"	"
4.....	0	0	2	0	1	"	"	"	"	"	"
5.....	1	0	5	5	0	1	"	"	"	"	"
6.....	3	12	15	20	9	0	1	"	"	"	"
7.....	23	70	112	91	49	14	0	1	"	"	"
8.....	177	544	740	640	302	96	20	0	1	"	"
9.....	1553	4500	6003	4725	2439	747	165	27	0	1	"
10.....	14963	41740	53585	41420	20810	7076	1550	260	35	0	1
11.....	157931	426514	532950	403315	203236	70114	17050	2860	385	44	0

Pour construire ce Tableau, il suffit de connaître des formules de récurrence reliant chacun des termes de la $n^{\text{ième}}$ ligne à ceux des lignes antérieures.

Nous avons obtenu de telles formules par trois méthodes qui se complètent l'une l'autre, et que nous donnons ci-dessous avec les résultats qu'elles nous ont fournis, mais sans entrer dans le détail des démonstrations qui sont un peu longues et qui demandent plus d'attention que de sagacité.

1° On considère une permutation particulière de $n-1$ termes, et l'on cherche, par l'intercalation du terme n, à obtenir une permutation de n termes correspondant à un polygone ayant $0, 1, 2, \ldots, n$ côtés simples.

En opérant ainsi, nous avons trouvé les formules

$$(1)\qquad \gamma_n^0 = (n-1)\gamma_{n-1}^0 + 2\frac{(n-4)}{(n-1)}\gamma_{n-1}^1 + \frac{2}{n-1}\gamma_{n-1}^2 - \frac{2}{n-2}\gamma_{n-2}^1,$$

$$(2)\qquad \gamma_n^1 = 4\gamma_{n-1}^0 + \frac{n^2-8n+18}{n-1}\gamma_{n-1}^1 + \frac{4(n-5)}{n-1}\gamma_{n-1}^2 + \frac{6}{n-1}\gamma_{n-1}^3 + \frac{6}{n-2}\gamma_{n-2}^1 - \frac{4}{n-2}\gamma_{n-2}^2.$$

Ces formules ne doivent pas être employées pour $n < 5$, car elles résultent de la simplification d'expressions plus étendues, dans lesquelles certains termes se présentent alors avec des coefficients négatifs, alors qu'ils doivent être simplement égalés à zéro. Cette remarque est générale.

2° On considère toutes les permutations qui commencent par 12 et qui correspondent à des polygones ayant k côtés simples, dont le nombre est évidemment $\frac{k}{n}\gamma_n^k$; si l'on supprime le chiffre 1, les permutations restantes ont $n-1$ termes consécutifs et correspondent, suivant les cas, à des polygones ayant $k-1$, k ou $k+1$ côtés simples, qu'il suffit de compter. Nous avons ainsi obtenu la *formule générale* suivante :

$$(3)\qquad \frac{k\gamma_n^k}{n} = \frac{2(n-k)}{n-1}\gamma_{n-1}^{k-1} + \frac{2k}{n-1}\gamma_{n-1}^k + \frac{k-2}{n-2}\gamma_{n-2}^{k-2} - \frac{2(k-1)}{n-2}\gamma_{n-2}^{k-1} + \frac{k}{n-2}\gamma_{n-2}^k.$$

Pour $k=1$ et $k=2$, cette formule se réduit à

$$(4)\qquad \frac{1}{n}\gamma_n^1 = 2\gamma_{n-1}^0 + \frac{2}{n-1}\gamma_{n-1}^1 + \frac{1}{n-2}\gamma_{n-2}^1,$$

$$(5)\qquad \frac{1}{n}\gamma_n^2 = \frac{n-2}{n-1}\gamma_{n-1}^1 + \frac{2}{n-1}\gamma_{n-1}^2 - \frac{1}{n-2}(\gamma_{n-2}^1 - \gamma_{n-2}^2).$$

3° Pour les valeurs de k voisines de n, l'examen direct des polygones donne

$$\gamma_n^n = 1,$$
$$\gamma_n^{n-1} = 0,$$
$$\gamma_n^{n-2} = \frac{n(n-3)}{2} \qquad (\text{pour } n > 2),$$
$$\gamma_n^{n-3} = \frac{2n(n-4)(2n-1)}{6} \qquad (\ \text{»}\ \ n > 3),$$
$$\gamma_n^{n-4} = \frac{n(n-5)(25n^2-229n+534)}{24} \qquad (\ \text{»}\ \ n > 4),$$
$$\gamma_n^{n-5} = \frac{n}{120}(208n^4-4700n^3+40340n^2-155680n+227712)$$
$$(\text{pour } n > 5).$$

De ces diverses formules, on peut évidemment déduire quantité d'autres; mais les formules (1), (4) et (5) suffisent pour la résolution des problèmes posés, puisqu'elles permettent de calculer les trois premières colonnes du Tableau, indépendamment des autres. On peut même en tirer des formules qui ne renferment que des termes d'une même colonne. Nous trouvons ainsi

$$(6)\quad \begin{aligned} &\gamma_{n+2}^0(n^2-3n-1)-\gamma_{n+1}^0(n^3-2n^2-2n-9) \\ &\quad -4\gamma_n^0(n-3)(n+2)+2\gamma_{n-1}^0(n-4)(n^2-n-3) \\ &\quad -\gamma_{n-2}^0(n^2-3n-1)-\gamma_{n-3}^0(n-3)(n^2-n-3) = 0 \\ &\qquad (n > 5); \end{aligned}$$

$$(7)\quad \begin{aligned} &\frac{\gamma_{n+2}^1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\gamma_{n+1}^1-\frac{4}{n}\gamma_n^1+\frac{2(n-3)}{n-1}\gamma_{n-1}^1 \\ &\qquad -\frac{1}{n-2}\gamma_{n-2}^1-\frac{n-2}{n-3}\gamma_{n-3}^1 = 0 \qquad (n > 4). \end{aligned}$$

Ces formules ne sont peut-être pas les plus simples qu'on puisse trouver.

Si nous revenons maintenant à notre premier énoncé, nous voyons qu'il faut ajouter aux permutations Γ_n^0 les permutations Γ_n^1, qui ont, soit entre leurs termes extrêmes une différence de 1 ou $n-1$, soit dans le corps de la permutation 1 et n consécutifs, puis les permutations Γ_n^2 qui réunissent ces deux conditions. Leur nombre total P_n est ainsi trouvé égal à

$$(8)\qquad \Gamma_n^0+\frac{2n-1}{n^2}\Gamma_n^1+\frac{2}{n^2}\Gamma_n^2.$$

On a ainsi pour

$$n = 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\ \ldots$$
$$P = 2,\ 14,\ 90,\ 646,\ 5242,\ 47622,\ 479306,\ 5296790,\ 63779034\ \ldots$$

La combinaison de la formule (8) avec les formules précédentes nous donne encore

$$(9)\qquad P_n = \frac{1}{n+2}\gamma^1_{n+2} + \frac{2}{n+1}\gamma^1_{n+1} + \frac{1}{n}\gamma^1_n,$$

$$(10)\qquad P_{n+1} = (n+2)P_n - (n-1)P_{n-1} - (n-4)P_{n-2} + (n-2)P_{n-3} \qquad (n > 4).$$

P. Poulet.

4761 (**1917**, 99) (H. Brocard). — *Jeu de Halma* (**1918**, 62; **1919**, 46). — *Les nouvelles scientifiques de la Nature* (n° 1066 du 4 novembre 1893, p. 91, avec 1 figure) donnent aux Petites Inventions une Note sur *le Jeu de l'Halma*. « L'Halma, jeu nouveau et très intéressant dont le nom est celui d'un vieux jeu grec, se joue sur un carton de 256 carrés, comme le montre la figure. Il y a 2 ou 4 joueurs. A chaque coin du carton, 13 carrés sont entourés d'une ligne noire, et, à deux extrémités opposées, une ligne plus forte entoure 6 carrés additionnels, ce qui fait 19 carrés. Les carrés compris dans les lignes noires sont appelés *camps* ou *cases*. Quand on joue à quatre on se sert des quatre cases des 13 carrés. Quand on joue à deux, on prend les deux cases des 19 carrés. Nous allons indiquer les règles de jeu à deux. On place le carton de sorte que chaque joueur ait en face de lui un camp de 19 carrés. On remplit l'un de pions blancs, l'autre de pions noirs. Le but du jeu est, pour chaque joueur, de faire sortir ses pions de son camp et de les faire arriver le plus vite possible dans le camp opposé. Celui qui y réussit le premier gagne. Il faut pour cela 60 à 80 mouvements. Il y a deux sortes de mouvements : le premier, le *pas*, par lequel on fait passer un pion d'un carré sur l'un des 8 carrés environnants (c'est la marche du roi des échecs). Le second, le *saut*, par lequel on fait sauter un pion par-dessus un autre, quelle qu'en soit la couleur, placé sur un carré voisin, pour retomber sur un carré vide, et l'on continue ainsi ce qui fait partie du même mouvement, dans n'importe quelle direction, tant que la disposition des pièces le rend possible, et avantageux. Mais, dans ce cas, le pion ne peut sauter que sur un carré de la même couleur que celui d'où il est parti. On ne peut faire qu'un pas par mouvement; on peut faire un nombre illimité de sauts. Avec le pas, il est facultatif d'aller d'une couleur à une autre. Avec le saut,

on doit toujours rester sur la même couleur. Contrairement à ce qui se passe pour les dames, les joueurs ne se prennent pas leurs pions. »

A. Gérardin.

4765 (**1917**, 101) (*R. Ratat*). — *Indicateur* $\varphi(n)$ (**1918**, 42). — Parmi les solutions de l'équation

$$\varphi(n) = \varphi(n+1),$$

on peut citer, en outre de celles déjà indiquées,

$$\varphi(2^{16}-1) = \varphi(2^{16}) = 2^8,$$
$$\varphi(2^{32}-1) = \varphi(2^{32}) = 2^{16},$$

dont on voit la loi de formation; d'ailleurs, $2^{32}+1$ n'étant pas premier, $\varphi(2^{64}-1) < \varphi(2^{64})$.

Trois nombres consécutifs peuvent avoir le même indicateur, ainsi

$$\varphi(5186) = \varphi(5187) = \varphi(5188) = 2592.$$

P. Poulet.

4771 (**1917**, 104) (H. Sebban). — *Détermination d'une suite* (**1919**, 16). — 1° Les suites V_n dans lesquelles $q = -1$ donnent la formule suivante :

$$\sum_{1}^{2n+1} v_i^2 = \sum_{1}^{4n+1} v_i + (p-1)\sum_{0}^{2n} v_{2i+1}.$$

Pour $p = 1$ (seconde suite de Fibonacci), on a la solution demandée

2° Les suites correspondantes U_n donnent la formule

$$\sum_{1}^{2n+1} u_i^2 = \sum_{0}^{n} u_{4i+1}.$$

E. Guérin.

4808 (**1918**, 6) (H. Sebban). — *Puissance d'un entier.* — La proposition énoncée est inexacte pour

$$p = 2, \qquad \text{avec} \qquad n = 2, 3, 4, 5, \ldots.$$

Peut-être est-elle exacte lorsque $4^{p+1}+1$ est un nombre premier.

G. Métrod.

4816 (**1918**, 26) (R. de Montessus de Ballore). — *Biquadratiques ou quartiques gauches* (**1918**, 72; **1919**, 50). — Voici une autre liste chronologique de références sommaires :

Corresp. Garnier et Quetelet, t. 11, 1839, p. 49-113.

M. Chasles (*C. R.*, 1860).

M. Chasles, Description par points, etc. (*C. R.*, t. 53, 1861, p. 767-773).

M. Chasles, Propriétés des courbes gauches du 4e ordre et de 1re espèce (*C. R.*, t. 54, 1862, p. 317-324 et 418-425).

Clebsch (*Crelle*, t. 63, 1864, p. 235).

J. Kœhler, Exercices de Géométrie analytique. t. 2, 1868, p. 249, Probl. 31.

A. Cayley (*Math. Papers*, t. 12, p. 321).

E. Laguerre, Sur les courbes gauches, etc. (*Soc. Philom.*, t. 5, 1868, p. 66).

L. Painvin (*N. A.*, 1871, quest. **1042**; *voir* aussi p. 561).

A. Harnack (*Math. Annalen*, t. 12, 1877, p. 47).

H. Léauté (*J. E. P.*, 1879, 46e Cahier, p. 65).

Schræter, Grundzüge einer rein geom. Theorie der Raumkurven 4 Ordn, 1er Species, 1890.

E. Duporcq, Quelques propriétés des biquadratiques gauches (*N. A.*, 1895, p. 266-270).

Servais (*N. A.*, 1891).

H. Léauté (*N. A.*, 1901, quest. 1901 à 1907, résolues en 1902 et en 1904).

Servais (*Mathesis*, 1909). H. Brocard.

4903 (**1919**, 35) (S. Wigert). — *Équations de Fermat simultanées.* — Par soustraction, on obtient

$$x^2 - 3y^2 + 3z^2 = 0,$$

ou, en posant $x = 3x'$,

$$y^2 = z^2 + 3x'^2.$$

Les diviseurs de y sont donc 2 et ceux de la forme $3m^2 + n^2$. La solution $y = 2$ est banale et n'a pas échappé à l'auteur de la question. Si l'on fait

$$y = 3m^2 + n^2,$$

on aura

$$z = 3m^2 - n^2 \qquad \text{et} \qquad x' = 2mn;$$

la première équation devient alors

$$36m^2n^2 - 2(3m^2 + n^2)^2 = 1$$

impossible, puisque le premier membre est divisible par 2 et que le second est l'unité. Les deux équations n'ont donc pas d'autre solution commune que $y = 2$. A. Boutin.

Autre réponse de M. H. Brocard.

4904 (**1919**, 35) (A. Colucci). — *Bibliographie des coniques sphériques.* — La dénomination de conique sphérique est due à Magnus (*Arch. Grünert*, t. 16) dans une étude sur les lignes focales du cône.

M. Chasles en a exposé des propriétés importantes dans ses Recherches de Géométrie pure sur les lignes et les surfaces du second degré (*Nouv. Mém. Acad. Belgique*, t. 5, 1829, et t. 6, 1830).

Voici d'autres références sommaires, à peu près dans leur ordre chronologique :

Gudermann, Ueber die analyt. Sphärik (*Crelle*, t. 6. 1830, p. 244-254).

Graves, Two geom. Memoirs, etc. (1841).

J. Booth, Rectification et quadrature d'une ellipse sphérique (*Phil. Magazine*, t. 25, 1844, p. 18 et suiv.).

A. Borgnet, Essai de Géométrie analytique de la sphère (1847) (premier Ouvrage paru en France sur ce sujet).

W. Robert's (*N. A.*, 1850, p. 141-143 et 308-309).

J. Booth, Son article de 1844 (*N. A.*, 1854, p. 94-113).

P. Serret, Des méthodes en Géométrie (1855, p. 84-87).

P. Serret, Théorie des courbes à double courbure (p. 58-74).

P. Serret, De quelques propriétés nouvelles des coniques sphériques (*Soc. philom.*, 1858).

Vannson, Formules fondamentales de l'analyse sphérique (*N. A.*, plusieurs articles, parmi lesquels, se rapportant à l'étude des coniques sphériques, 1858, p. 215-223, 243-261, 307-313; 1859, p. 5-26).

H. Brocard (*N. A.*, 1874, p. 337-338, rép. 116 et 117).

G. Salmon, Géométrie analytique à trois dimensions. Cônes et coniques sphériques.

Cassani (*Giornale* de Naples, 1866).

F. Morley (*Math. Gazette*, 1899, p. 249-250).

G. Huber, Ueber den sphärischen Kegelschnitt, etc. (*Z. H.*, t. 45, 1900, p. 86-118).

Enfin, pour les coniques sphériques homofocales, on peut citer :

M. Chasles (*C. R.*, t. 50, 1860, p. 623-633).

Vannson (*N. A.*, 1860, p. 197-206).

L. Cremona (*N. A.*, 1860, p. 269-279). H. Brocard.

Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires (§ 21) (Gauthier-Villars, 1873).

Darboux, Principes de Géométrie analytique (Livre II, Ch. VI) (Gauthier-Villars et Cie, 1917).

Salmon, Géométrie analytique à trois dimensions (1re Partie, Ch. X) (Gauthier-Villars, 1899). P. HENDLÉ.

4905 (**1919**, 35) (A. COLUCCI). — *Cas de possibilité de l'équation de Fermat :*

$$x^2 - Dy^2 = -1 \qquad (D \textit{ non carré}).$$

Il faut et il suffit que la période des quotients incomplets du développement de $\sqrt{D}$ en fraction continue admette un nombre impair de termes. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que tous les facteurs premiers de D ou $\frac{D}{2}$ soient de la forme $4k+1$; mais cette condition, nécessaire, n'est pas suffisante.

Les valeurs successives de D ne forment pas une suite récurrente.

A. BOUTIN.

Au sujet de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - Dy^2 = -1 \qquad (D \textit{ non carré}).$$

Question déjà proposée n° 2571 (**1903**, 102) et maintes fois traitée : **1903**, 224, 319; **1904**, 156, 242; **1905**, 53, 249; **1906**, 243; **1907**, 132, 274; **1913**, 201; **1914**, 114 (rép. **4243**); **1915**, 202; **1916**, 56.

Une condition primordiale est que D soit somme de deux carrés, mais D peut être premier ou composé, comme on le voit sur la liste ajoutée à l'énoncé 4905.

Je n'ai pas rencontré d'indication relative à une loi de succession de ces nombres D.

Les solutions x, y forment deux séries récurrentes analogues à celles de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - Dy^2 = 1 \qquad (D \textit{ non carré})$$

avec une relation de récurrence du même genre, savoir

$$t_{n+1} = f\, t_n - t_{n-1},$$

f désignant un nombre entier, soit pair, soit impair, au lieu que, pour l'équation (2), le nombre f est toujours pair.

Voir les références précitées.

Note. — *Cf.* Encyclopédie Molk, et B. D. (1) 1913, p. 261).

La question est de celles qui sont certainement vouées à une fréquente réédition, en raison de son importance capitale, car l'équation (1) est une pierre d'achoppement pour les adeptes de l'arithmologie qui s'y aventurent sans guide, tandis que l'équation (2) admet toujours une infinité de solutions.

Enfin, il peut arriver que l'équation (1) ne soit vérifiée que par des nombres imaginaires, ce qui n'avance à rien.

$$x^2 - 3y^2 = -1, \qquad x = 2\sqrt{-1}, \qquad y = \sqrt{-1};$$
$$x^2 - 15y^2 = -1, \qquad x = 4\sqrt{-1}, \qquad y = \sqrt{-1}.$$

H. Brocard.

Autre réponse de M. Cashmore.

4906 (**1919**, 36) (A. Colucci). — *La tangente à l'ellipse en un point* P *passe par le point* G *où la perpendiculaire en* F *à* FP *rencontre la directrice d.* — La construction indiquée n'est pas nouvelle, car la directrice d étant la polaire du foyer F, on sait que la polaire PP′ d'un point G de d passe par le foyer F et qu'elle est perpendiculaire en F à GF.

D'après l'*Encyclopédie* Molk, t. III, vol. 3 (*Géométrie algébrique plane*, p. 115), cette proposition a été établie par Ph. de La Hire (*Sectiones coniscæ*, 1685, p. 189-192).

Note. — Voir *N. A.*, 1874, p. 318-330 : Sur la détermination des foyers dans les lignes et dans les surfaces de révolution du second degré. L'auteur, H. Lemonnier, rappelle (p. 323) comme propriété bien connue que la droite qui joint tout point d'une directrice au foyer correspondant est perpendiculaire à sa polaire passant par ce foyer, et (p. 326) il l'étend à une quadrique de révolution ayant un foyer situé sur l'axe de révolution.

Remarque. — En fait, le théorème ci-dessus (de La Hire) est classique, et on le trouve énoncé et démontré, par exemple, dans la *Géométrie analytique* de Briot et Bouquet, 1860, p. 216.

H. Brocard.

Ce résultat est bien connu. *Voir* Salmon, *Coniques*, Chap. XI, n° 192, et le *Traité de Géométrie* de Rouché et de Comberousse, Livre VIII, n° 1158, 7e et 8e édit., 1900 et 1912.

Ce n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la proposition élémentaire suivante : « Les tangentes aux extrémités d'une corde d'une conique, qui tourne autour d'un point fixe, se coupent constamment

sur la polaire de ce point, en un point conjugué du point de rencontre de cette polaire avec la corde. » P. Hendlé.

4910 (**1919**, 37) (F. Balitrand). — *Cours de Chasles à l'École Polytechnique.* — La réponse décisive me paraît devoir être cherchée dans *Le Livre du Centenaire de l'École Polytechnique*, 1794-1894. Et, en effet, au tome 1, 1895, p. 115, dans la notice biographique due à Eugène Rouché, il est rappelé que Chasles a été professeur de Géodésie et de Machines à l'École Polytechnique en 1841, puis, en 1846, professeur de Géométrie à la Sorbonne.

H. Brocard.

4911 (**1919**, 37) (H. Sebban). — *Sommation de la suite*

$$S_k = 1^k C_n^1 + 2^k C_n^2 + \ldots + n^k C_n^n.$$

Si l'on multiplie le premier terme par x, le second par x^2, ..., le $n^{\text{ième}}$ par x^n, on aura la suite $S_k(x)$, et la somme cherchée est $S_k(1)$. On a évidemment

$$S_{k+1}(x) = \frac{d}{dx}[x S_k(x)],$$

ce qui donne, de proche en proche,

$$S_0 = 2^n - 1,$$
$$S_1 = n 2^{n-1},$$
$$S_2 = n 2^{n-1} + n(n-1) 2^{n-2},$$
$$S_3 = n 2^{n-1} + 3n(n-1) 2^{n-2} + n(n-1)(n-2) 2^{n-3}.$$

La loi est manifeste et facile à démontrer; k augmentant d'une unité, le second membre s'augmente d'un terme; les puissances de 2 diminuent successivement d'une unité. Leur coefficient est successivement n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)(n-2)(n-3)$, ..., à un facteur constant près. Ces derniers facteurs forment le triangle arithmétique

1				
1	1			
1	3	1		
1	7	6	1	
1	15	25	10	1
...	...	...	...	...

Ces nombres se rencontrent dans diverses recherches. M. M. d'Ocagne (*Sur une classe de nombres remarquables*) en a fait une

étude systématique. Je ne retrouve pas l'indication du périodique où ce travail a été publié. (C'est *American Journal of Mathematics*, t. 9, 1886, p. 353-380, La Réd.). L'auteur désigne par k_m^p celui qui est à l'intersection de la $m^{\text{ième}}$ ligne et de la $p^{\text{ième}}$ colonne. Ils sont définis par la formule de récurrence

$$k_m^p = p\,k_{m-1}^p + k_{m-1}^{p-1}.$$

Leur fonction génératrice est

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-px)} = k_p^p + k_{p+1}^p\,x + k_{p+2}^p\,x^2 + \ldots;$$

leur expression finie est

$$\begin{aligned}
k_m^p &= \frac{\Delta^p(0^m)}{p!},\\
k_m^1 &= 1,\\
1\,k_m^2 &= 2^{m-1} - 1,\\
1.2\,k_m^3 &= 3^{m-1} - 2.2^{m-1} + 1,\\
1.2.3\,k_m^4 &= 4^{m-1} - 3.3^{m-1} + 3.2^{m-1} - 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On retrouve ces nombres dans notre question 4792 (*I. M.*, **1918**, 2).

A. Boutin.

Autre réponse de MM. H. Brocard et R. Marchay.

4912 (**1919**, 37) (H. Sebban). — *Puissances des coefficients du binome.* — La sommation des puissances semblables des coefficients du binome a bien probablement retenu l'attention des mathématiciens, mais elle paraît n'avoir pas abouti, pour l'instant, à grand chose. On connait, il est vrai, la formule de Lagrange pour $\Sigma(C^2)$. Jusqu'à plus ample informé, le bilan de la question 4912 a été déjà donné ici, dans la réponse 4867, **1919**, 31.

H. Brocard.

QUESTIONS.

4967. [**I17**] Je retrouve dans mes archives le théorème suivant :

$$2^a - 1$$

est divisible par

$$8p + 1 = (8N)^2 + (2x + 1)^2 = \text{nombre premier}$$

lorsque

$$2a = x^2 + x + 16N^2.$$

Exemple :

$$N = 1, \qquad x = 1, \qquad a = 9, \qquad 8p + 1 = 73.$$

Ce théorème est-il nouveau, ou bien sa forme seule est-elle inédite ? A. Gérardin.

4968. [**I17**] Le nombre $N = 2798978$ est de trois façons la somme de trois bicarrés :

$$N = 13^4 + 26^4 + 39^4 = 9^4 + 29^4 + 38^4 = 6^4 + 31^4 + 37^4.$$

Chercher les plus petits nombres de cette espèce.

Autre exemple : pour

$$N = 3.750.578,$$

cf. **3427**, **1914**, 155. A. Gérardin.

4969. [**I17**] Résoudre les équations simultanées

$$x + y^2 = z^2,$$
$$x^2 + y = t^2$$

en nombres rationnels, positifs ou négatifs.

Exemple :

$$x = -1, \qquad y = \frac{5}{4}, \qquad z = \frac{3}{4}, \qquad t = \frac{3}{2};$$

cf. 4418, **1914**, 147; **1915**, 67, 126. A. Gérardin.

4970. [**B1d**] Calculer le déterminant et le permanent cubiques, actinomorphes par rapport aux quatre diagonales, d'éléments 1 au dehors du tétraèdre régulier dont les sommets sont quatre sommets (non adjacents) de la matrice, tétraèdre d'éléments x.

Le déterminant est nul si l'ordre p est 2 ou 3; il vaut

$$6(x+1)(x-1)^3 \qquad \text{si} \qquad p = 4.$$

Quant au permanent, pour $p = 2, 3, 4$, il a pour développements respectifs

$$4x, \quad 4(4x^2 + 3x + 2),$$
$$8(x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 7).$$

M. Lecat (Bruxelles).

4971. [**B1d**] Calculer le déterminant

$$\left| 1 + (x-1) \sum_{\alpha=A}^{B} \delta\left(n + \alpha - 1, \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu\right) \right|_p.$$

Pour $A = 1$, $B = p$, son expression est

$$(1-x)^{p-1} \{ x\delta_{n,2} + [n - 2 + (-1)^n]\, \delta_{p,2}\, \overline{\delta}_{n,2} + (n-1) \times (\delta_{n,3}\, \delta_{p,3} + \delta_{n,4}\, \delta_{p,3} - \delta_{n,3}\, \delta_{p,4}) \}.$$

Elle est très remarquable. La valeur est nulle, sauf (comme pour $B = p - 1$) pour un nombre fini de valeurs de l'ordre et de la classe. Pour $n = 2$, il y a une infinité de valeurs non nulles. Pour $n = 3$, il y en a deux, précédées d'une valeur nulle (ce qui est spécial au déterminant cubique). Pour $n = 4$, il y en a deux. Enfin, pour $n \geq 5$, il n'y en a toujours qu'une seule.

Ces anomalies rappellent d'une manière frappante celles du nombre des polyèdres réguliers dans l'espace à n dimensions. Pour $n=2$, il y en a une infinité, dont tous, sauf trois, sont anormaux. Pour $n=3$ et $n=4$, il y en a respectivement deux et trois d'anormaux. Tandis que, pour $n \geqq 5$, il n'y a plus de singularité.

On voit, en outre, que le déterminant cubique se comporte d'une manière spéciale. *Cf.* 3909 (**1912**, 49).

Quelles singularités se présentent pour A et B quelconques? M. Lecat (Bruxelles).

4972. [**I17**] (Σ) (S) On peut mettre, d'une infinité de façons, tout nombre $N = x^8 - y^8$ sous la forme

$$(a^4 - b^4) - (c^4 + d^4).$$

Exemples :

$$\begin{array}{lllllllllll}
x = 4, & 4, & 4, & 4, & 6, & 6, & 6, & 7, & 7, & 7, & \ldots, \\
y = 2, & 2, & 2, & 2, & 3, & 3, & 3, & 6, & 6, & 6, & \ldots, \\
a = 31, & 23, & 24, & 36, & 42, & 46, & 198, & 41, & 44, & 47, & \ldots, \\
b = 24, & 12, & 11, & 13, & 38, & 28, & 54, & 37, & 29, & 19, & \ldots, \\
c = 33, & 19, & 23, & 33, & 43, & 43, & 162, & 28, & 24, & 31, & \ldots, \\
d = 8, & 18, & 6, & 26, & 18, & 4, & 171, & 3, & 14, & 6, & \ldots.
\end{array}$$

Il y a beaucoup d'autres solutions plus simples. Chercher des identités. A. Gérardin.

4973. [**I1**] Dans quels systèmes de numération existe-t-il un carré parfait de la forme $\overline{aaaa}$? Jean Pacé.

4974. [**B1d**] D'une remarque de J.-J. Sylvester (*N. A. M.*, t. **13**, **1854**, p. 305; *Papers*, t. **2**, Cambridge, 1908), on peut conclure que le déterminant de classe 2

$$[\lambda\,\delta_{i,j} + j\,\delta_{i,j+1} + (p-i)\,\delta_{i+1,j}]_p$$

$$= \lambda^{\delta_{1,(-1)^p}} \left[\!\!\left[\alpha\right]\!\!\right]_1^{p-\delta_{-1,(-1)^p}} [\lambda^2 - (2\alpha - \delta_{1,(-1)^p})^2].$$

Il est tout indiqué de généraliser pour une classe paire quelconque, en considérant

$$\Big|\lambda\,\delta(i_1, \ldots, i_{2\nu}) + \sum_{\varepsilon=1}^{\nu}[i_\varepsilon\,\delta(i_1, \ldots, i_{\varepsilon-1}; 1+i_\varepsilon; i_{\varepsilon+1}, \ldots, i_{2\nu}) + (p - i_{\nu+\varepsilon})\,\delta(i_1, \ldots, i_{\nu+\varepsilon-1}; 1+i_{\nu+\varepsilon}; i_{\nu+\varepsilon+1}, \ldots, i_{2\nu})]\Big|_p.$$

Calculer ce déterminant. M. Lecat (Bruxelles).

4975. [**B1d**] I. Dans son cinquième et dernier travail (*P. M.*, 4e série, t. **30**, **1865**, p. 411-413; *Papers*, t. 5, Cambridge, **1892**, p. 496-497) sur les déterminants de classe supérieure, Cayley démontre que [1]

$$(\mathrm{I}) \qquad \Big|\overset{+}{\Big|}\lambda_{j_1, j_2}\overset{+}{\Big|}_{(j=1,\ldots,n)}\Big|_{(i=1,\ldots,p)} = 0 \qquad \text{pour} \qquad p > n.$$

La relation nous paraît être encore vraie quand on généralise le premier membre : 1° en donnant aux λ, en indice supérieur, l'indice j_2; 2° en prenant, comme éléments du déterminant, des permanents à n dimensions (au lieu de 2); 3° en remplaçant le permanent $(++)$ par le *permanent* ou un *péné-déterminant* $(+\pm)$ et le déterminant par un péné-déterminant $(\pm\pm)$; 4° en superposant plus de deux systèmes de barres. Il faudrait donc démontrer que, pour $p > n$,

$$\overset{\pm}{\underset{k}{\Big|\cdots\Big|}}\ \overset{+}{\underset{1}{\Big|}}\ \overset{+}{\underset{0}{\Big|}}\lambda^{(\omega_m)}_{\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}, i^{(k)}} \ddots \overset{\pm}{\underset{0}{\Big|}}{}^{i^{(1)}}_{\omega_m}\Big|_{(\omega=1,\ldots,n)}\ \overset{\pm}{\underset{1}{\Big|}}\cdots\Big|_{(i^{(1)}=1,\ldots,p)}\ \overset{\pm}{\underset{k}{\Big|}}\cdots\Big|_{(i^{(k)}=1,\ldots,p)}$$

---

[1] Les notations qu'il utilise sont tout autres et beaucoup moins concises que celles ci-dessus. La terminologie diffère aussi. Les déterminants de classe supérieure, qu'il avait appelés, dans son premier travail (1843), *fonctions réductibles à une somme de déterminants ordinaires*, sont nommés *commutants* par lui (et par Sylvester) depuis son premier et historique Mémoire (1851) sur l'invariantologie, où il crée en quelque sorte cette science, grâce à l'emploi de déterminants à plus de deux dimensions.

est nul, le permanent pouvant être pris pour toutes les matrices, sauf pour la matrice k.

II. Cayley signale ensuite comme *probable* qu'on peut, en faisant $p = n$ dans le déterminant (I), généraliser la relation

$$\begin{vmatrix} 2\lambda\lambda' & \lambda\mu' + \lambda'\mu \\ \lambda\mu' + \lambda'\mu & 2\mu\mu' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix}^2.$$

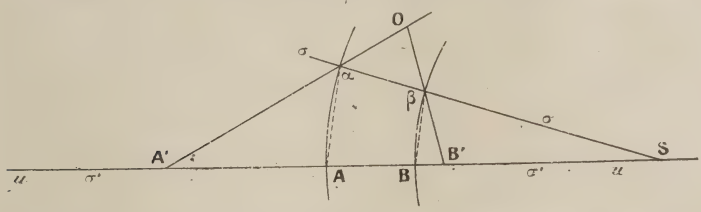
Nous croyons, au contraire, que cette égalité constitue une propriété n'existant que dans le cas de deux dimensions (*cf.* question **4452**, t. **2**, **1915**). La généralisation au cas de classe quelconque n'aurait lieu que si les permanents sont remplacés par les déterminants. Comme l'illustre Cayley laisse entendre qu'il a consacré, vainement, ses efforts à la recherche de la relation générale, nous pensons qu'il serait très intéressant de répondre à ce difficile problème : *qui a raison?*

M. Lecat (Bruxelles).

4976. [**K23**] Je désirerais les solutions, par la règle et le compas, des questions ci-après :

I. Étant données deux ponctuelles projectives, chercher deux points correspondants tels que la droite qui les réunit soit d'une longueur donnée.

II. Dans le plan passant par le centre O de perspective et



perpendiculaire à la direction de l'intersection des deux plans perspectifs σ, σ' sont donnés :

1° Le centre de perspective O;

2° La trace (u) des plans σ, σ' après la rotation et superposition de σ sur le plan σ';

3° Sur cette trace (u), on a aussi deux segments homologiques correspondants AB, A′B′.

Il s'agit de trouver sur le plan donné, qui est le plan du papier, la trace du plan σ avant sa rotation autour de l'axe d'homologie ou, ce qui revient au même, de trouver la trace S de l'axe d'homologie.

Remarque. — La solution de la première question serait une élégante réponse à la seconde.

En effet, la trace cherchée du plan σ est une droite qui joint deux points correspondants des deux ponctuelles projectives engendrées sur les rayons OA′, OB′ par les deux faisceaux projectifs qui ont respectivement leur centre en A et B, et tous leurs rayons correspondants parallèles [1]. En outre, le segment intercepté (de cette trace) entre OA′ et OB′ doit être de la longueur donnée AB.

Sertorio Giuseppe (Gênes).

2341. [Σ] (1902, 115) Trouver les surfaces enveloppes de sphères ou de quadriques dont l'équation est de la forme

$$f(z) = f_1(x) + f_2(y). \tag{1}$$

Plus généralement, trouver celles des surfaces (1) sur lesquelles existe une famille de courbes planes de degré p, sans qu'il en existe une de degré $< p$.

Références bibliographiques : Darboux, *Théorie des surfaces;* E. Lecornu, *J. E. P.*, 1883; Ed. Maillet, *J. E. P.*, 1902.

Ed. Maillet.

2350. [E2] (1902, 117) Les intégrales définies

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{a^2+x^2}\,\frac{\sin bx}{x}\,dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{a^2+x^2}\cos bx\,dx,$$

---

[1] On voit facilement que Aα et Bβ doivent être parallèles.

et plusieurs autres de forme semblable, sont exprimables au moyen du logarithme intégral. Je désirerais savoir si l'on a publié des recherches analogues autres que celles qui se trouvent dans le *Compendium* de Schlömilch.

M. Lerch (Fribourg).

2352. [**E2**] (1902, 118) Je désire savoir si la formule suivante, que j'avais obtenue au moyen des fonctions de Bessel,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}u\left(x+\frac{1}{x}\right)} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx = -2\sqrt{\frac{\pi}{u}}\, e^{\frac{1}{2}u}\, li(e^{-u}),$$

a été déjà signalée ou si elle se présente comme conséquence immédiate d'une relation connue.

M. Lerch (Fribourg).

2358. [**O6s**] (1902, 142) On donne une surface S et le cône circonscrit ayant pour sommet un point A.

Soient AB une génératrice du cône, B le point de contact avec S, M le plan tangent à S et au cône en B; CBD une perpendiculaire à AB au point B dans le plan tangent M; EBF la normale à la surface en B.

Les surfaces réglées définies par ces deux droites CBD, EBF ont-elles été déjà étudiées? H. Brocard.

2359. [**V9**] (1902, 142) Quel peut être le géomètre-poète qui, en 1814, publia un petit Volume intitulé : *Lettres à une jolie femme sur le cadastre?* Il signe seulement D. de V., et son Ouvrage semble avoir été écrit par ordre du Gouvernement impérial, pour dissiper les craintes des paysans inquiets de voir mesurer leurs champs. G. Maupin.

2362. [**V7**] (1902, 143) Dans les *Œuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges, etc.* (1634), une Note d'Albert Girard renferme le passage suivant :

« La racine de 10 est $3\frac{53353}{328776}$, bien près, car son quarré

est $\frac{1}{10809365817 6}$ trop, qui est une chose de nulle estime, comme d'autre costé en la disme le quarré de 1635742187 51 [7] est très près de 2675652504 [14], mais combien s'en faut-il? seulement 1 [14] .... »

Je voudrais savoir s'il paraît possible d'arriver à ces résultats, tous exacts, sans employer les fractions continues.

G. Maupin.

2363. [**K10e**] (**1902**, 143) Je désire une liste des meilleures constructions approximatives (à l'aide de la règle et du compas) de la trisection de l'angle.

Karl Störmer (Christiania).

2371. [**I19c**] (**1902**, 145) Un correspondant pourrait-il démontrer que, si z et t sont des nombres impairs et n un entier supérieurs à l'unité, l'expression

$$t^3 - 1 - 2^n(2^{2(n-1)}z^2 + t)z$$

ne peut s'annuler?

Paulmier.

2375. [**O4c**] (**1902**, 170) Le problème suivant a-t-il été déjà posé, étudié ou résolu?

Enveloppe des plans perpendiculaires en chaque point M *d'une courbe fixe (plane ou gauche) aux génératrices* OM *d'un cône de sommet* O.

Peut-on assigner à cette enveloppe des propriétés particulières?

Je ne demande que des indications sommaires.

H. Brocard.

2390. [**V9**] (**1902**, 175) Quel est l'auteur de la *Géométrie en vers techniques*; Paris, 1891, in-8° de 18 pages, avec cette épigraphe :

« Rien n'est beau que le vrai »?

G. de Rocquigny.

RÉPONSES.

1822 (**1900**, 125) (A. Mannheim). — *Traduction d'écrits de Stewart* (**1901**, 176; **1904**, 241). — M. Leclerc ayant eu l'amabilité de me prêter les *Mélanges mathématiques* de A. Labosne, formant un manuscrit de 203 pages de texte et 8 pages de figures, j'y trouve, à partir de la page 171, sous le faux titre « Analyse d'Ouvrages anciens », les indications suivantes :

Propositiones geometricae, more Veterum demonstratae, ad Geometriam antiquam illustrandam et promovendam idoneae. Auctore Matthœo Stewart, in Academia Edinensi matheseos professore. Edinburgi, MDCCLXIII.

« Carnot (*Géométrie de position*, p. 483) regarde avec raison cet Ouvrage comme excellent, et regrette qu'il n'ait jamais été traduit en français. Nous pensons que nos lecteurs, élèves et professeurs, nous sauront gré de leur donner les énoncés des cent douze propositions contenues dans les deux livres dont se compose cet Ouvrage. »

Je suis prêt, si M. Leclerc m'y autorise, à publier au *S. Œ.* ces 112 énoncés, avec les figures jointes au manuscrit.

Cf. ci-après ma réponse 2944. A. Gérardin.

2261 (**1902**, 4) (A. Boulanger). — *Sur la théorie du frottement de glissement.* — Au moment où M. Raffy formulait les réflexions citées, M. Marcel Brillouin avait déjà publié dans les *Annales de Chimie et de Physique*, avril 1899, 7e s., t. XVI, sa *Théorie moléculaire du frottement des solides polis*, travail qui commence ainsi : « C'est une opinion extrêmement répandue, presque universelle, parmi les physiciens qui se sont voués aux études thermodynamiques, que le frottement des solides est inexplicable par l'action de forces centrales, fonctions de la seule distance des molécules deux à deux. Je me propose de montrer le contraire : dans le glissement relatif de deux corps solides polis, une partie du travail moteur se convertit en force vive de mouvements moléculaires, imperceptibles comme mouvements, perceptibles seulement comme chaleur en se plaçant au point de vue de la Théorie mécanique de la chaleur. »

Mais les contradictions intrinsèques rencontrées dans la Théorie du frottement, « irréductibles tant qu'on s'obstine à négliger les

phénomènes calorifiques » suivant M. Raffy, sont fournies par l'application de la loi de Coulomb, loi expérimentale, qui implique bien dans le frottement une perte d'énergie disparue sous forme calorifique, et les théories analogues à celles de M. Brillouin ne feront que fournir une image du mécanisme de cette disparition.

D'ailleurs une analyse plus pénétrante du phénomène physique dans les cas singuliers signalés, eu égard à l'élasticité des liaisons, a permis à M. Lecornu (*C. R.*, 6 et 27 mars 1905) et au Comte de Sparre (*C. R.*, 31 juillet 1905; *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1906, p. 41-47; 108-132; 1907, p. 141-160) de liquider les contradictions rencontrées. *Is. Uber.*

3576 (**1909**, 146) (A. Gérardin). — *Solutions de*

$$(1)\quad (x+a)^{2n}+x^{2n}+(y+b)^n=(x-a)^{2n}+x^n+(y-b)^n.$$

Pour $n=1$, on trouve immédiatement

$$y=x^2+4ax+2b;$$

application

$$a=b=1,$$

$$(x+1)^2+x^2+(x^2+4x+3)$$
$$=(x^2+4x+2)+(x^2+4x+1)+(x-1)^2.$$

Pour $n=2$, la condition s'écrit

$$(2)\qquad x^4+8ax^3+8a^3x+4b^2=(y-2b)^2.$$

On sait facilement résoudre ce genre d'équations.

Pour $a=b=1$, je signalerai les deux identités suivantes, dont la plus remarquable est la première, vraie aussi pour $n=4$:

$$3^4+2^4-1^4=12^2+11^2-13^2=96,$$
$$3^4+2^4-1^4=\ \ 8^2+\ \ 9^2-\ \ 7^2=96.$$

Pour résoudre l'équation (2) on peut poser

$$y-2b=\pm(x^2+4ax+p),$$

puis

$$p=-8a^2,$$

d'où

$$x=\frac{16a^4-b^2}{18a^3}$$

avec

$$b=4a^2\pm 18\lambda a^2;$$

en donnant à λ successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., on aura d'innombrables solutions du problème.

Exemples :

$a = -1, \quad b = 14, \quad x = 10, \quad p = -8, \quad y = 80$ et -24 :

$$9^4 + 10^4 - 11^4 = 24^2 + 38^2 - 10^2 = 1920,$$
$$9^4 + 10^4 - 11^4 = 66^2 + 80^2 - 94^2 = 1920.$$

$a = -1, \quad b = 22, \quad x = 26, \quad p = -8, \quad y = 608$ et -520 :

$$25^4 + 26^4 - 27^4 = 608^2 + 586^2 - 630^2 = 316160,$$
$$25^4 + 26^4 - 27^4 = 520^2 + 542^2 - 498^2 = 316160.$$

Pour $n = 4$, la condition devient plus difficile avec $a = b = 1$, mais on pourrait essayer, par exemple,

$$y = 2x^2 + 6x + 4.$$

En n'attribuant pas à a et b de valeur spéciale, ou même en ne supposant pas les nombres en progression arithmétique, il sera facile de trouver des solutions de (1), en se reportant si l'on veut à mes identités **3427** (**1912**, 254).

Voici d'autres exemples obtenus à simple lecture :

$$6^8 + 5^8 - 2^8 = 51^4 + 55^4 - 61^4,$$
$$9^8 + 2^8 - 6^8 = 59^4 + 95^4 - 85^4,$$
$$28^8 + 51^8 - 47^8 = 192^4 + 2401^4 - 1817^4,$$
$$6^8 + 2^8 - 4^8 = 33^4 + 26^4 - 13^4,$$
$$6^8 + 2^8 - 3^8 = 46^4 + 28^4 - 43^4,$$
$$28^8 + 51^8 - 49^8 = 192^4 + 2209^4 - 1817^4.$$

A. Gérardin.

3892 (**1911**, 148) (M. Lecat). — *Symétrie d'une matrice.* — Il n'est pas nécessaire, comme le laisse entendre l'énoncé de la question, que N soit impaire. Du reste le problème, *tel qu'il est posé*, a perdu de son intérêt depuis que L.-H. Rice (*Am. J. M.*, t. **40**, 1918, p. 250) a établi les lois du produit de ce que nous appelons des *pénédéterminants* (1). Pour ceux-ci le genre de *symétrie* de la matrice (actinoïde) d'une de leurs puissances résulte aussi aisément des lois de la multiplication que pour les déterminants à l'aide des lois de Scott et de Cayley.

Mais c'est en réalité l'étude de la méronomie que visait la question, car cette étude intéresse la théorie des formes algébriques. Un pénédéterminant à ν indices *signants* (ou $n - \nu$, si n est pair comme ν) possède en général $\binom{n}{\nu}$ valeurs distinctes suivant les rangs que l'on donne aux indices signants; et rien n'empêche de considérer ces valeurs comme les déterminations d'une fonction mul-

(1) *Voir* page suivante la réponse à la question 3897.

tiforme, par analogie avec ce qui a été fait pour les déterminants de classe impaire; d'où l'extension de la notion de polygénéité. Or, il est évident que si la matrice est particulière (par exemple actinoïde), il peut y avoir mérogénéité pour un ou plusieurs pénédéterminants.

Observons aussi que la question 4257 (**1913**, 174), où la matrice est trouée, peut se poser pour ces fonctions.

Nous consacrerons ailleurs un Mémoire à l'étude de la mérogénéité des pénédéterminants et en particulier (ce qui répondra complètement à la question ici posée) des puissances d'un pénédéterminant donné. M. Lecat (Bruxelles).

3897 (**1911**, 169) (M. Lecat). — *Produit de déterminants de classes impaires* (**1912**, 257; **1919**, 80). — Avec L.-H. Rice (*Am. J. M.*, t. 40, 1918, p. 246), qualifions un indice de *signant* (nous conservons le mot anglais) ou de *nonsignant*, suivant qu'on tient compte ou non du nombre des inversions dans sa rangée pour trouver le signe des termes d'un déterminant. Un déterminant de classe n possède le nombre pair

$$n - \delta_{1,(-1)^{n-1}} \equiv N,$$

d'indices signants, les déterminants de classe impaire ayant donc toujours un indice nonsignant [1] et ceux de classe paire n'en

---

[1] Une remarque très importante, car elle s'applique à presque tous les travaux qui ont été publiés sur les déterminants à plus de deux dimensions. Par « indice *fixe* » (abréviativement pour « indice de la rangée fixe »), on entendait l'indice *ordonné* dont on range les valeurs dans les éléments d'un terme), indice pour lequel, en cas de classe impaire, on choisissait toujours, comme si c'était nécessaire, l'indice nonsignant, dont le rang est imposé (sauf dans des cas spéciaux de mérogénéité). Or, si ce cumul de fonctions n'est pas illicite, puisque le choix du *rang ordonnateur* (rang de l'indice ordonné) est arbitraire, il peut présenter, à côté de l'avantage (contestable d'ailleurs) d'un vocable unique à signification double, des inconvénients nombreux. Parmi eux, signalons ici celui de devoir compter les inversions dans les $n-1$ rangées signantes; tandis que si l'indice ordonné est signant (ce qui a toujours lieu en cas de classe paire), comme on n'a pas à s'inquiéter des inversions dans la rangée non signante, ce n'est plus que dans $n-2$ rangées (signantes) qu'il faut compter les transmutations. Scott, Gegenbauer et bien d'autres, placent toujours l'indice ordonné au premier ou au dernier rang, ce qui est licite et simplifie l'écriture, mais à tort ils ne font jamais l'hypothèse que l'indice non signant occupe un autre rang. C'est là une lacune qui a été néfaste dans le développement de la théorie et qui, jointe à la méconnaissance de la notion d'indice non signant, a engendré de graves et nombreuses erreurs.

ayant pas. Les permanents n'ont, par définition, que des indices nonsignants.

On généralise en considérant un nombre $\nu \neq 0$ d'indices signants, pourvu que ce nombre soit pair comme N. Cette restriction est imposée par le théorème de Cramer-Bézout, sur les permutations d'éléments à indices. Il y a donc $\frac{N}{2}$ de ces valeurs ν. Le déterminant ainsi généralisé sera appelé *pénédéterminant* d'espèce ν. Cette extension est très féconde : non seulement la plupart des propriétés subsistent, quel que soit le nombre (pair non nul) des indices signants, mais bien des exceptions disparaissent, dont la plus remarquable est assurément celle qui fait l'objet de la question.

En vertu de la définition, le pénédéterminant

$$\text{(I)} \qquad \left|\left(\overset{\frown}{i_1}, \ldots, \overset{\frown}{i_\nu}; \overset{\smile}{i_{\nu+1}}, \ldots, \overset{\smile}{i_n}\right)\right|,$$

où l'on a surmonté des signes $\frown$ et $\smile$ respectivement les indices signants et nonsignants, les indices de même « signance » (*signancy*) étant supposés contigus en vue de faciliter l'écriture, peut s'exprimer par exemple ainsi :

$$\sum_{\varepsilon=1}^{p} \prod_{1}^{\nu-1}{}_{s} (\pm \varepsilon_s) \prod_{1}^{p}{}_{\alpha} (\alpha, \varepsilon_1^{(\alpha)}, \ldots, \varepsilon_{n-1}^{(\alpha)}),$$

1 étant le rang ordonnateur, pour simplifier.

Signalons, en passant, que pour représenter symboliquement un pénédéterminant d'espèce ν, on doit manifestement faire usage, suivant que l'indice ordonné est non signant ou signant, de ν ou $\nu - 1$ systèmes d'unités alternées λ et de $n - \nu - 1$ ou $n - \nu$ systèmes d'unités concurrentes μ; d'où, par exemple, l'expression symbolique

$$\prod_{1}^{p}{}_{\alpha} \sum_{\varepsilon=1}^{p} (\alpha, \varepsilon_1^{(\alpha)}, \ldots, \varepsilon_{n-1}^{(\alpha)}) . \prod_{1}^{\nu-1}{}_{s} \lambda_{\omega_s^{(\alpha)}}^{(s)} \prod_{\nu+1}^{n}{}_{t} \mu_{\omega_t^{(\alpha)}}^{(t)} .$$

La méthode graphique de H.-W. Lloyd Tanner (*P. L. M. S.*, t. 10, 1878-1879, p. 167, § 11), pour trouver le signe d'un terme d'un déterminant, s'applique aux pénédéterminants, avec une modification assez évidente.

Désormais les barres enfermant l'élément général seront surmontées des signes suivants :

$$\overset{\pm}{|} \ldots \overset{\pm}{|} \quad , \quad \overset{+}{|} \ldots \overset{\pm}{|},$$

respectivement pour un pénédéterminant (pouvant dégénérer en un déterminant) et pour « un permanent *ou* un pénédéterminant ». Le signe $\pm$ pourra dans certains cas être omis, notamment lorsque l'élément général indiquera les indices non signants, comme cela a lieu en (I).

Ces préliminaires posés, arrivons à la multiplication. La loi de la multiplication par files peut être formulée comme suit :

$$\overset{\pm}{\Big|} b\left(\overset{\cup}{\varepsilon_1}, \ldots, \overset{\cup}{\varepsilon_\rho}; \overset{\cap}{\varepsilon_{\rho+1}}, \ldots, \overset{\cap}{\varepsilon_r}\right) \overset{\pm}{\Big|}_p \cdot \overset{\pm}{\Big|} h\left(\overset{\cup}{\omega_1}, \ldots, \overset{\cup}{\omega_\sigma}; \overset{\cap}{\omega_{\sigma+1}}, \ldots, \overset{\cap}{\omega_s}\right) \overset{\pm}{\Big|}_p$$

$$= \overset{\pm}{\Bigg|} \sum_{\mu=1}^{p} b\left(\overset{\cup}{i_1}, \ldots, \overset{\cup}{i_\rho}; \overset{\cap}{i_{\rho+1}}, \ldots, \overset{\cap}{i_{r-1}}; \mu\right)$$

$$\times h\left(\overset{\cup}{i_r}, \ldots, \overset{\cup}{i_{r+\sigma-1}}; \overset{\cap}{i_{r+\sigma}}, \ldots, \overset{\cap}{i_{r+s-2}}; \mu\right) \overset{\pm}{\Bigg|}_p,$$

la signance des i étant la même que celle des ε et des ω correspondants. Cette relation se démontre assez aisément si l'on applique la décomposition des pénédéterminants, facteurs en une somme algébrique de déterminants ordinaires, suivant la formule

$$\Big| b\left(\overset{\cup}{\varepsilon_1}, \ldots, \overset{\cup}{\varepsilon_\rho}; \overset{\cap}{\varepsilon_{\rho+1}}, \ldots, \overset{\cap}{\varepsilon_r}\right) \Big|_p$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{p} \prod_{1}^{r-2}{}_{\sigma} (\pm\gamma_\sigma)^2 \prod_{\rho+1}^{r-2}{}_{R} (\pm\varepsilon_R) \Big| b\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-2}; \overset{\cap}{\varepsilon_{r-1}}, \overset{\cap}{\varepsilon_r}\right) \Big|_p,$$

qui n'est qu'un cas fort particulier de celle que Rice donne pour exprimer un pénédéterminant en une somme algébrique de pénédéterminants de classe inférieure quelconque.

On peut remarquer que si les éléments polynomes de la matrice du produit sont convertis en files non signantes par suppression des signes $+$, on obtient la matrice du produit à éléments monomes.

On a, en effet,

$$\overset{+}{\Big|} b\left(\varepsilon_1, \ldots, \overset{\cap}{\varepsilon_r}\right) \overset{\pm}{\Big|}_p \cdot \overset{+}{\Big|} h\left(\omega_1, \ldots, \overset{\cap}{\omega_s}\right) \overset{\pm}{\Big|}_p$$

$$= \overset{+}{\Big|} b\left(i_1, \ldots, \overset{\cup}{\overset{\cap}{i_r}}\right) \cdot h(i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-1}, i_r) \overset{\pm}{\Big|}_p,$$

la *signance* (*signancy*) de $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r-1}$, et de $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}$ étant maintenue au second membre. La signance de i_r dépend de celles de ε_r et ω_s suivant une règle analogue à la règle des signes, $\cap$ étant assimilé à $-$ et $\cup$ à $+$.

Comme cas particulier de la règle de multiplication par files, on voit que le produit

$$\left| b\left(\overset{\cup}{\varepsilon_1}, \ldots, \varepsilon_r\right) \right|_p \cdot \left| h\left(\overset{\cup}{\omega_1}, \ldots, \omega_s\right) \right|_p$$

de deux déterminants de classes impaires peut s'exprimer par un pénédéterminant de classe paire :

$$\left| \sum_{\mu=1}^{p} b\left(\overset{\cup}{i_1}, \overset{\cap}{i_2}, \ldots, \overset{\cap}{i_{r-1}}, \mu\right) h\left(\overset{\cup}{i_r}, \overset{\cap}{i_{r+1}}, \ldots, \overset{\cap}{i_{r+s-2}}, \mu\right) \right|_p$$

à deux indices nonsignants. Et comme

$$\left| \lambda\left(\overset{\cup}{\sigma_2}, \overset{\cap}{\sigma_3}, \ldots, \sigma_{2n+1}\right) \right|_p = \left| \delta_{\sigma_1, \sigma_2}^{\cap} \cdot \lambda\left(\overset{\cap}{\sigma_2}, \overset{\cup}{\sigma_3}, \ldots, \sigma_{2n+1}\right) \right|_p,$$

on voit que cette loi de multiplication n'est pas distincte de celle que nous avons donnée antérieurement (*I. M.*, 1912, p. 257). Il est à remarquer en effet que, à part une très heureuse simplification des notations, les pénédéterminants ne sont autres fonctions que celles que Gegenbauer et nous-même avons dénommées déterminants-permanents. Il convient donc de mettre ce terme hors d'usage.

M. Lecat (Bruxelles).

3902 (**1911**, 171) (*A. Bar*). — *Surfaces dont le ds^2 est réductible à la forme de Liouville.* — Le ds^2 des surfaces cerclées est réductible à une forme très simple, si l'on prend pour lignes coordonnées les génératrices circulaires $v = \text{const.}$ et leurs trajectoires orthogonales $u = \text{const.}$, forme qui met en évidence sa structure par rapport à la variable u :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{(u-a)^2(u-b)^2} \\ &\quad \times [\mathrm{A}(u-g)(u-h)(u-k)(u-l)\,dv^2 + \mathrm{B}\,du^2] \\ &= \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2. \end{aligned}$$

C'est d'elle qu'il conviendrait de partir pour exprimer la condition connue d'harmonicité, à savoir que l'équation

$$\frac{p^2}{\mathrm{E}} + \frac{q^2}{\mathrm{G}} = 1$$

admet une intégrale quadratique

$$\alpha p^2 + 2\beta pq + \gamma q^2 = \text{const.}$$

Dans une Note insérée aux *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 110, 1890, p. 329, M. Demartres indique la marche à suivre que voici :

En combinant les équations de condition qui expriment l'existence de cette intégrale quadratique de manière à en faire disparaître les dérivées de α, β, γ par rapport à v, on obtient un système de trois équations différentielles linéaires du second ordre, ne contenant que les dérivées de α, β, γ par rapport à u et qu'on peut considérer comme des équations différentielles ordinaires dont les zéros ou les pôles de E et G par rapport à u sont simplement des pôles pour leurs coefficients.

La discussion de ces équations différentielles (du type de Fuchs) permettra de déterminer *a priori* α, β, γ, ce qui y resterait d'indéterminé étant défini par la substitution des valeurs obtenues dans les équations initiales de condition et la transformation de celles-ci en identités.

M. Demartres ajoute que cette méthode lui a permis d'obtenir *un assez grand nombre de surfaces cerclées admettant des systèmes de Liouville*. Mais depuis trente ans, il n'a publié aucun résultat à ce sujet, il est mort récemment et la question paraît abandonnée.

Des cas particuliers, si le problème ne peut être épuisé, seraient pourtant bien intéressants à connaître. *Is. Uber.*

4385 (**1914**, 97) (F. Henroteau). — *Problème de Newton* (**1916**, 18, 81; **1919**, 82). — Un détail bibliographique intéressant à retenir, c'est que la réponse à cette question parue ici le 10 juin 1914, avait été visée dès le premier Cahier du *Bulletin des Sciences mathématiques*, publié le 15 janvier 1914. On y trouve, pages 5-21, un article de M. E. Doublet relatif aux deux volumes, récemment édités, de la *Mécanique* d'Euler.

Une Note pages 11-12 rapporte l'extrait d'un article de Biot (*J. des Savants*, 1853) où il affirme, avec Laplace, que Newton avait énoncé (en 1687) sans démonstration, comme proposition géométrique, son théorème relatif au solide de moindre résistance, quoique sans doute il n'ait pu l'obtenir que par l'analyse.

Il est bien possible que Biot et Laplace n'aient pas connu ou remarqué la démonstration que Newton en donna en 1694 à D.-F. Gregory, comme l'a déclaré ici M. Lecat (**1916**, 81).

H. Brocard.

4521 (**1915**, 125) (*L.-G. Tariste*). — *Propriétés de suites récurrentes.* — Il m'est impossible de chercher maintenant des identités, mais j'en possède pour le problème symétrique

$$x^3 + y^3 = a^3 - b^3,$$
$$x^3 - y^3 = c^3 + d^3.$$

Pour la présente question, j'ai seulement obtenu 44 solutions inédites, et l'on peut poursuivre cette étude.

Voici les deux plus simples :

$$(A) \quad \begin{cases} 168^3 - 126^3 = 207^3 - 183^3, \\ 168^3 + 126^3 = 46^3 + 188^3. \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} 17520^3 - 13140^3 = 14600^3 - 1460^3, \\ 17520^3 + 13140^3 = 4371^3 + 19629^3. \end{cases}$$

La méthode suivie est élémentaire : je me donne deux petits nombres, par exemple 4 et 3, et je pose

$$4^3 - 3^3 = 37, \qquad 4^3 + 3^3 = 91.$$

J'utilise les Tables de $x^3 + y^3 = Az^3$ de Lenhart (que M. Escott a bien voulu m'envoyer en partie, en juillet 1912), les résultats de Ed. Lucas ou d'autres connus, et les Tables inédites de M. Bastien, adressées au *S. OE.* les 13 décembre 1912 et 4 février 1913.

Il suffit de voir à (37) les solutions où y est négatif, sans compter l'initiale, et à (91) celles où y est positif.

	x.	$-y$.	z.
(37)	4	— 3	1
	10	— 1	3*
	69	— 61	14
	1033	— 33	310
	8910	— 8873	619
	13683	— 9587	3568
	351937	— 351900	7189
	732421	— 622918	159873
	.....	.....	.....

	X.	Y.	Z.
(91)	4	3	1
	94	23	21*
	6543	1457	1460
	1045981	369251	235908
	5098845	3966358	1289143
	12836179	9276821	3175290

Il reste maintenant à chercher le p. p. c. m. d'un z et d'un Z quelconques, pour avoir une solution; l'astérisque donne celle de l'auteur; on en aura ici $(7 \times 5 - 1) = 34$ inédites.

A. Gérardin.

4552 et 4553 (**1915**, 194) (C. A. Laisant). — *Forme des diviseurs premiers de* $\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^n - (x-y\sqrt{a})^n\right]$ (**1916**, 64, 66). — Soit p un nombre premier diviseur de

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^n - (x-y\sqrt{a})^n\right]$$

et non diviseur de x, y, a, de $x^2 - ay^2$ et de

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^d - (x-y\sqrt{a})^d\right].$$

Si $r^2 \equiv a \pmod{p}$, on peut écrire

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^{p-1} - (x-y\sqrt{a})^{p-1}\right]$$
$$\equiv \frac{1}{2r}\left[(x+yr)^{p-1} - (x-yr)^{p-1}\right] \equiv 0 \pmod{p}.$$

(Théorème de Fermat.)

Si $r^2 \not\equiv a \pmod{p}$, c'est-à-dire si

$$a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1 \pmod{p},$$

on a

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^{p+1} - (x-y\sqrt{a})^{p+1}\right]$$
$$= (p+1)x^p y + \ldots + \frac{(p+1p)\ldots(p-2i+1)}{1.2\ldots(2i+1)}$$
$$\times x^{(p-2i)} y^{(2i+1)} a^i + \ldots + (p+1)xy^p a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 0 \pmod{p},$$

puisque tous les termes sauf les extrêmes sont divisibles par p et puisque, comme l'on sait,

$$x^p \equiv x, \qquad y^p \equiv y \qquad \text{et} \qquad a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1.$$

Soit maintenant $N = p - 1$, si $r^2 \equiv a$, ou $N = p + 1$, si $r^2 \not\equiv a \pmod{p}$, et $Nu - nv = d$, d étant le plus grand commun diviseur

de N et n, on a

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^n-(x-y\sqrt{a})^n\right]\equiv 0 \pmod{p},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^N-(x-y\sqrt{a})^N\right]\equiv 0,$$

et par suite

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^{nv}-(x-y\sqrt{a})^{nv}\right]\equiv 0,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x-y\sqrt{a})^{Nu}-(x-y\sqrt{a})^{Nu}\right]\equiv 0,$$

puisque $X^{nv}-Y^{nv}$ est divisible par X^n-Y^n, et $X^{Nu}-Y^{Nu}$ par X^N-Y^N, d'où, puisque $Nu=nv+d$,

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^{Nu}-(x-y\sqrt{a})^{Nu}\right]\frac{1}{2}\left[(x+y\sqrt{a})^{nv}+(x-y\sqrt{a})^{nv}\right]$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^{nv}-(x-y\sqrt{a})^{nv}\right]\frac{1}{2}\left[(x+y\sqrt{a})^{Nu}+(x-y\sqrt{a})^{Nu}\right]$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}(x^2-ay^2)^{nv}\left[(x+y\sqrt{a})^d-(x-y\sqrt{a})^d\right]\equiv 0 \pmod{p},$$

et par suite, puisque x^2-ay^2 est non divisible par p,

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^d-(x-y\sqrt{a})^d\right]\equiv 0 \pmod{p}.$$

Or, par hypothèse, ceci est impossible pour d facteur de n et $<n$, on doit donc admettre $d=n$, et par suite N divisible par n ou $N=kn$.

On a donc le théorème suivant :

Les nombres premiers p qui divisent

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^n-(x-y\sqrt{a})^n\right]$$

et qui ne divisent pas x, y, a, ni x^2-ay^2, ni

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^d-(x-y\sqrt{a})^d\right],$$

pour d facteur de n, sont des nombres de la forme $kn+1$ qui admettent a comme résidu quadratique ou des nombres de la forme $kn-1$, qui admettent a comme non résidu quadratique.

Remarque. — Ce théorème donne aussi la forme des nombres premiers p qui divisent $\frac{1}{2}\left[(x+y\sqrt{a})^n+(x-y\sqrt{a})^n\right]$, puisque cette expression divise $\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[(x+y\sqrt{a})^{2n}-(x-y\sqrt{a})^{2n}\right]$.

L. Aubry.

4613 (**1916**, 26) (P. Hendlé). — *Définir le cercle inscrit comme lieu géométrique* (**1916**, 144, 231). — Cette question me paraît entièrement résolue par l'introduction de la polaire trilinéaire du point de Gergonne, considérée comme homologue de la droite de l'infini dans une transformation homographique, où le cercle inscrit correspond alors à la conique inscrite de Steiner. On a ainsi, en particulier, les propositions suivantes :

« Le cercle inscrit est le lieu du pôle de la polaire trilinéaire du point de Gergonne, par rapport aux coniques circonscrites passant par ce point. »

« Le cercle inscrit est le lieu des rebroussements des cubiques tritangentes au triangle sur la polaire trilinéaire du point de Gergonne. » (Transformation homographique d'un théorème de Plücker.)

P. Hendlé.

4621 (**1916**, 49) (*Quærens*). — *Restes quadratiques.* — I. Soit R un reste quadratique de N, et soient p, q, r, ... les facteurs premiers de R.

1° N est premier. Dans ce cas $\left(\frac{R}{N}\right)$ est un symbole de Legendre et l'on a

$$\left(\frac{R}{N}\right)=+1.$$

Mais

$$\left(\frac{R}{N}\right)=\left(\frac{p}{N}\right)\left(\frac{q}{N}\right)\ldots,$$

donc parmi les symboles de Legendre

$$\left(\frac{p}{N}\right),\quad\left(\frac{q}{N}\right),\quad\ldots,$$

il y a un *nombre pair d'unités négatives.*

2° N n'est pas premier; soient a, b, c, ... ses facteurs premiers. Dire que R est reste quadratique de N, c'est dire que les symboles de Legendre

$$\left(\frac{R}{a}\right), \quad \left(\frac{R}{b}\right), \quad \ldots$$

sont tous égaux à $+1$. C'est donc dire que le symbole de Jacobi

$$\left(\frac{R}{N}\right) = \left(\frac{R}{a}\right).\left(\frac{R}{b}\right) \ldots$$

a pour valeur $+1$.

Mais on a

$$\left(\frac{R}{N}\right) = \left(\frac{p}{N}\right)\left(\frac{q}{N}\right) \ldots,$$

donc parmi tous les symboles de Jacobi

$$\left(\frac{p}{N}\right), \quad \left(\frac{q}{N}\right), \quad \ldots$$

il y a un *nombre pair d'unités négatives*. Le calcul de ces symboles ne peut donc pas révéler si N est premier ou composé.

II. Soit maintenant R′ un non-reste quadratique de N, et soient p, q, r, ... les facteurs premiers de R′.

1° N est premier. Dans ce cas $\left(\frac{R'}{N}\right)$ est un symbole de Legendre et l'on a

$$\left(\frac{R'}{N}\right) = -1.$$

Mais

$$\left(\frac{R'}{N}\right) = \left(\frac{p}{N}\right)\left(\frac{q}{N}\right) \ldots$$

donc parmi les symboles de Legendre

$$\left(\frac{p}{N}\right), \quad \left(\frac{q}{N}\right), \quad \ldots$$

il y a un *nombre impair d'unités négatives*.

2° N n'est pas premier; soient a, b, c, ... ses facteurs premiers. Dire que R′ n'est pas reste quadratique de N, c'est dire que parmi les symboles de Legendre

$$\left(\frac{R'}{a}\right), \quad \left(\frac{R'}{b}\right), \quad \ldots,$$

il y a *au moins une unité négative*.

Le symbole de Jacobi

$$\left(\frac{R'}{N}\right) = \left(\frac{R'}{a}\right)\left(\frac{R'}{b}\right)\cdots$$

peut donc avoir pour valeur $+1$ ou -1.

S'il a pour valeur -1, c'est-à-dire si parmi les symboles de Jacobi

$$\left(\frac{p}{N}\right), \quad \left(\frac{q}{N}\right), \quad \ldots,$$

il y a un *nombre impair d'unités négatives*, le calcul de ces symboles ne peut donc pas révéler si N est premier ou composé.

Mais si

$$\left(\frac{R'}{N}\right) = +1,$$

c'est-à-dire si parmi les symboles de Jacobi

$$\left(\frac{p}{N}\right), \quad \left(\frac{q}{N}\right), \quad \ldots,$$

il y a *un nombre pair d'unités négatives*, le calcul de ces symboles $\left[\text{ou plus simplement de } \left(\frac{R'}{N}\right)\right]$ montre que N est composé.

Exemple. — 3 est non-reste de 35. Or on a

$$\left(\frac{3}{35}\right) = +1,$$

donc 35 n'est pas premier.

G. Métrod.

4712 (**1917**, 55) (A. Gérardin). — *Solution de l'équation*

$$(x^2 - y^2)(x^2 + 2y^2) = x^2 - 2y^2.$$

On peut poser

$$x = \frac{ab}{c}, \quad y = \frac{ad}{c},$$

b premier avec d, d'où

$$a^2(b^2 - d^2)(b^2 + 2d^2) = c^2(b^2 - 2d^2),$$

$b^2 - d^2$ est premier avec $b^2 - 2d^2$ et ne peut avoir, avec $b^2 + 2d^2$, que 3 comme facteur commun, $b^2 + 2d^2$ ne peut avoir, avec $b^2 - 2d^2$, que 2 comme facteur commun.

On a donc nécessairement l'un des 8 cas :

$$\begin{array}{llllll} b^2 - d^2 = \pm t^2, & \pm t^2, & -3t, & 3t^2, & -3t^2, & 3t^2, \\ b^2 - 2d^2 = \pm u^2, & \pm 2u^2, & -2u^2, & u^2, & -u^2, & 2u^2, \\ b^2 + 2d^2 = v^2, & 2v^2, & 6v^2, & 3v^2, & 3v^2, & 6v^2, \end{array}$$

avec t, u, v premiers entre eux, deux à deux, $a = \lambda u$, $c = \lambda t v$ ou $3\lambda t v$.

Dans les quatre premiers cas, on a pour $X = uv$ ou $2uv$,

$$(b^2 - 2d^2)(b^2 + 2d^2) = b^4 - 4d^4 = \pm X^2,$$

ce qui est impossible d'après Legendre.

Le cinquième cas est impossible, car $b^2 - 2d^2 = -2u^2$ exige b pair, tandis que $b^2 - d^2 = -3t^2$ avec b pair, exige d pair et non premier avec b.

Le sixième cas est encore impossible, car $b^2 + 2b^2 = 3d^2 \equiv 0, 3$ ou $4 \pmod 8$, exige b et d impairs ou non premiers entre eux, tandis que $b^2 - 2d^2 = u^2 \equiv 1 \pmod 8$ exige d pair.

On a, dans le septième cas :

$$b^2 - d^2 = -3t^2, \qquad b^2 + 2d^2 = 3v^2,$$

d'où

$$(1) \qquad b^2 = v^2 - 2t^2,$$

$$(2) \qquad d^2 = v^2 + t^2;$$

v étant premier avec t, (1) exige v impair et t pair, d'où

$$t = 2kl, \qquad v = k^2 + 2l^2, \qquad \pm b = k^2 - 2l^2,$$
$$t = 2mn, \qquad v = m^2 - n^2, \qquad d = m^2 + n^2,$$

et par suite

$$k = ef, \qquad l = gh, \qquad m = eg, \qquad n = fh,$$
$$v = e^2 f^2 + 2g^2 h^2 = e^2 g^2 - f^2 h^2,$$
$$f^2(e^2 + h^2) = g^2(e^2 - 2h^2),$$

mais f doit être premier avec g et e avec h, $e^2 + h^2$ est donc premier avec $e^2 - 2h^2$ et l'on a nécessairement

$$f^2 = e^2 - 2h^2, \qquad g^2 = e^2 + h^2;$$

on retombe donc sur le système (1), (2), mais en nombres beaucoup plus petits; or ce système n'a pas de solution en petits nombres, donc il est impossible.

Soit enfin le huitième cas :

$$b^2 - d^2 = 3t^2, \qquad b^2 - 2d^2 = 2u^2, \qquad b^2 + 2d^2 = 6v^2,$$

d'où

$$(3) \qquad b^2 = 2t^2 + 2v^2, \qquad d^2 = 2v^2 - t^2,$$

$$(4) \qquad u^2 = 2t^2 - v^2.$$

On sait que (3) et (4) sont complètement résolus en prenant

$$v = m^2 + n^2, \qquad t = m^2 - n^2 + 2mn, \qquad \pm d = m^2 - n^2 - 2mn,$$
$$t = p^2 + q^2, \qquad v = p^2 - q^2 + 2pq, \qquad \pm u = p^2 - q^2 - 2pq;$$

on a donc

$$v + t = 2m^2 + 2mn = 2p^2 + 2pq,$$
$$m = ef, \qquad m + n = gh, \qquad p = eg, \qquad p + q = fh,$$
$$v = e^2f^2 + (gh - ef)^2 = f^2h^2 - 2(fh - eg)^2,$$
$$e^2(2f^2 + 2g^2) + a^2(f^2 + g^2) - 6efgh = 0,$$
$$\frac{e}{h} = \frac{3fg \pm \sqrt{9e^2g^2 - 2(f^2 + g^2)^2}}{2f^2 + 2g^2},$$

ceci exige d'abord

$$k^2 = 9e^2g^2 - 2(f^2 + g^2)^2 = (2f^2 - g^2)(2g^2 - f^2),$$

mais t et v étant premiers entre eux, il en est de même de f et g, $2f^2 - g^2$ et $2g^2 - f^2$ sont donc aussi premiers entre eux, et comme ils ne peuvent être tous deux < 0, on a nécessairement

$$2f^2 - g^2 = r^2, \qquad 2g^2 - f^2 = s^2;$$

on retombe donc sur le système (3), (4), mais en nombres beaucoup plus petits, comme on le voit aisément; toutes les solutions de ce système doivent donc se déduire par la méthode précédente des solutions $f = 1$, $g = \pm 1$, $f = -1$, $g = \pm 1$; or, avec ces valeurs, on retrouve la solution $v = t = 1$, ou $v = t = 2$ qui n'en diffère pas; donc on doit admettre qu'il n'y en a pas d'autre en nombres premiers entre eux.

L. Aubry.

4745 (**1917**, 75) (H. Parodi). — *Balistique*. — Les équations du n° 4745 sont données dans l'*Encyclopédie* Molk, tome IV, vol. 6; *Balistique*, p. 28; mais pour arriver à les traiter, il faudra étudier à fond et revoir tout ce qui en a été déjà tiré, afin d'y puiser quelque suggestion permettant de réaliser un nouveau progrès. Malheureusement, cette question, comme celles de Mécanique et

d'Astronomie, sort du domaine de la plupart de nos lecteurs, mieux au courant de l'Arithmologie, de l'Algèbre et de la Géométrie.

Une réponse décisive à la question 4745 se fera sans doute attendre quelque temps. H. Brocard.

Le Service des Tables de tir de la Section technique de l'Artillerie a établi une Note autographiée qui contient la solution de cette question, mais qui ne peut être encore livrée à la publicité.

La Rédaction.

4769 (**1917**, 103) (G. Métrod). — *Décomposition d'un nombre en un produit de n facteurs.* — Soit

$$N = a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda,$$

a, b, ..., l, étant premiers. Appelons $F_n(N)$ le nombre des manières de décomposer N en un produit de n facteurs, ces facteurs pouvant être égaux à 1 et deux décompositions étant considérées comme distinctes lorsqu'elles sont composées des mêmes facteurs dans un ordre différent.

La fonction arithmétique F_n est *régulière*, c'est-à-dire que si a et b sont premiers entre eux, on a

$$F_n(ab) = F_n(a).F_n(b).$$

En effet, soit

$$a = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n,$$
$$b = \zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_n,$$
$$ab = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_n.$$

Si l'on pose

$$\pi_1 = \varepsilon_1 \zeta_1 \quad \ldots \quad \pi_n = \varepsilon_n \zeta_n,$$

les nombres ε_1, ζ_1, ..., ε_n, ζ_n sont parfaitement déterminés, puisque a et b sont premiers entre eux; donc à toute décomposition de a et de b, correspond une et une seule décomposition de ab, et réciproquement.

La question revient donc à évaluer $F_n(a^\alpha)$, a étant premier.

On a

$$F_1(a^\alpha) = 1.$$

Les décompositions de a^α en un produit de deux facteurs sont :

$$1.a^\alpha, \quad a.a^{\alpha-1}, \quad a^\alpha.1.$$

Donc

$$F_2(a^\alpha) = \alpha + 1.$$

Pour avoir les décompositions de a^α en trois facteurs, il faut poser

$$a^\alpha = a^h.a^{\alpha-h},$$

donner à h les valeurs 0, 1, 2, ..., α, et décomposer $a^{\alpha-h}$ en un produit de deux facteurs. Donc

$$F_3(a^\alpha) = \sum_{h=0}^{h=\alpha} F_2(a^{\alpha-h})$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha+2).$$

En général, on a

$$F_n(a^\alpha) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{(n-1)!}$$
$$= C_{\alpha+n-1}^{n-1}.$$

Et, par conséquent,

$$F_n(N) = \prod_a C_{\alpha+n-1}^{n-1},$$

le produit étant étendu à tous les exposants des facteurs premiers de la décomposition de N. G. Métrod.

4770 (**1917**, 103) (H. Sebban). — *Curiosités arithmétiques* (**1918**, 14). — Voici encore quelques identités qui fournissent des curiosités arithmétiques analogues à celles qu'indique M. Sebban :

$$[(b-1)b^{n-1}+(b-2)b^{n-2}+\ldots+(b-n)b^0](b-1)+(b-n-2)$$
$$=(b-2)(b^n+b^{n-1}+\ldots+1),$$

$$(b^{n-1}+2b^{n-2}+\ldots+nb^0)(b-2)+n$$
$$=(b-1)b^{n-1}+(b-2)b^{n-2}+\ldots+(b-n)b^0,$$

$$(b^n-1)^2=(b-1)(b^{n-2}+b^{n-3}+\ldots+1)b^{n+1}+(b-2)b^n+1,$$

$$(b^n-1)(b-3)\frac{b^n-1}{b-1}$$
$$=(b-3)\frac{b^{n-1}-1}{b-1}b^{n+1}+(b-4)b^n+\frac{2b^{n-1}-1}{b-1}b+3,$$

$$(b^n-1)(b-2)\frac{b^n-1}{b-1}$$
$$=(b-2)\frac{b^{n-1}-1}{b-1}b^{n+1}+(b-3)b^n+\frac{b^{n-1}-1}{b-1}b+2.$$

A chacune de ces identités correspondent les exemples suivants :

$$987654.9+2=8888888,$$
$$1234567.8+7=9876543,$$
$$9999^2=99980001,$$
$$99999.77777=7777622223,$$
$$999999.888888=888887111112.$$

G. Métrod.

4894 (**1919**, 5) (M. Rignaux). — *Un problème de mathématiques sur l'échiquier* (**1919**, 93). — Euler (1759), Vandermonde (1771), Teodoro Ciccolini (1866), Roget (1840), l'abbé J.-A. Durand (1856) et Jaenisch (1862) s'occupèrent de cette question.

Voir à ce sujet : Jaenisch, *Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs*, St-Pétersbourg, 1862; Seghieri-Orsini, *Il giuoco degli scacchi*, Milano, 1915; Carlo Salvoili, *Teorica e pratica del giuoco degli scacchi*, Venezia.

A. Colucci (Caserte).

4915 (**1919**, 38) (A. Gérardin). — *Équation*

$$x^3+y^3+z^3=k(x+y+z).$$

Cette équation s'écrit

$$(1)\qquad x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+\frac{3xyz}{x+y+z}=k.$$

On trouve tout d'abord la solution particulière

$$x=1,\qquad y=2,\qquad z=3,\qquad k=6.$$

L'équation (1) est évidemment satisfaite par les formules

$$x=\frac{b+c}{2},$$
$$y=b,$$
$$z=c,$$
$$k=\frac{b^2+c^2}{2}+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2,$$

qui donnent des valeurs entières si l'on prend b, c ensemble pairs ou impairs.

En faisant $b=1$, $c=3$; $b=3$, $c=5$, on a les solutions indiquées par M. Gérardin.

A. Colucci (Caserte).

Posons

$$x=a+r,\qquad y=a,\qquad z=a-r.$$

On obtient

$$x+y+z=3a$$

et

$$x^3+y^3+z^3=3a^3+6ar^2=3a(a^2+2r^2).$$

Par suite $k=a^2+2r^2$, et il suffit que x, y, z soient des entiers en progression arithmétique.

Le deuxième exemple s'obtient lorsque $a^2+2r^2=3a$; et, plus

généralement pour $a^2 + 2r^2 = 3na$, l'équation devient

$$x^3 + y^3 + z^3 = n(x + y + z)^2.$$

Enfin, pour $a^2 + 2r^2 = (3a)^2$, c'est-à-dire pour $r = 2a$, on obtient

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3.$$

J. Pacé.

4916 (**1919**, 38) (G. Boulloud). — *Nombre de faces d'un polyèdre d'après le nombre des sommets.* — Ces deux nombres n'ont pas de relation formelle, parce qu'ils doivent être associés au nombre des arêtes, en vertu de la formule d'Euler

$$S + F = A + 2.$$

On s'en assurera aisément sur des exemples très simples de polyèdres convexes.

Note. — Sans porter atteinte à la juste renommée de la formule d'Euler, il est intéressant de rappeler que, d'après diverses communications au cours de l'année 1890, à l'Académie des Sciences, E. de Jonquières a signalé à nouveau, vingt-neuf ans après Baltzer, l'énoncé de la même proposition dans un écrit posthume de Descartes, demeuré longtemps ignoré.

Voir *B. M.*, 2e série, t. 4, 1890, p. 43-55, et *Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris*, t. 45, p. 325-379; et *B. M.*, 3e série, t. 3, 1902, p. 312 et 313 de la Notice de G. Loria : *L'œuvre mathématique d'Ernest de Jonquières* (276-322).

Remarque. — Dans une question de ce genre, on tire une très grande facilité de la figuration d'un polyèdre *convexe* par sa perspective tracée à l'*intérieur* d'une de ses faces prise pour tableau, comme on le sait notamment sur l'exemple classique du dodécaèdre d'après Hamilton (représenté ici **1895**, p. 324, à propos du Jeu icosien); mais un exemple immédiat et beaucoup plus simple est celui de deux triangles équilatéraux, dont l'un intérieur à l'autre, directement ou inversement situé, qui donnent aussi deux polyèdres convexes de six sommets et cependant de cinq et huit faces.

Autre observation, communiquée par M. Laisant : un cube et une pyramide à base heptagonale ont huit sommets, et cependant six ou huit faces. H. Brocard.

4917 (**1919**, 39) (A. Colucci). — *Coniques circonscrites dont les normales au sommet du triangle de référence sont concourantes.* — Le lieu du centre et le lieu du point de concours des normales sont des cubiques circonscrites au triangle.

Voir *I. M.*, 4778 (**1917**, 123; **1918**, 63) et 4803 (**1918**, 5, 90).
P. Hendlé.

Il s'agit du lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle ABC et dont les normales aux points A, B, C concourent en un point P.

Ce problème a été déjà étudié à diverses reprises, comme on le voit dans la réponse donnée, **1918**, p. 63-64, à la question **4778** (**1917**, p. 123).

Le lieu du point P est une cubique dont les remarquables propriétés ont été signalées dans des articles parus en 1864, 1865, 1886, 1891, etc. Voir *loc. cit.*, **1918**. H. Brocard.

(*Voir* la réponse à la question 4778, *I. M.*, **1918**, p. 63.) Le lieu demandé est une cubique; le problème est bien connu. Je ne sais si le lieu de P a été donné. C'est la cubique

$$\sum (\cos A \cos C - \cos B) y (x^2 - z^2) = 0,$$

cubique des inverses relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre, que l'on rencontre dans diverses questions relatives au triangle. A. Boutin.

4920 (**1919**, 66) (L. Roche). — *Études relatives aux tétraédrocubiques.* — J'ai appliqué la transformation définie par

$$Xx = Yy = Zz = Tt$$

dans un Travail inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences d'Amsterdam.* Il se trouve dans le Tome XI (p. 84-88) des *Proceedings of the Section of Sciences* (traduction anglaise) et est intitulé : « Congruences of twisted curves in connection with a cubic transformation ». Jan de Vries (Utrecht).

4933 (**1919**, 72) (H. Koechlin). — *Triangles semblables* **1919**; 158. — Soit, par rapport à deux axes rectangulaires quelconques,

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = x - iy.$$

On reconnaît facilement que deux triangles, dont les sommets ont pour arguments $\xi_1 \xi_2 \xi_3$, $\xi'_1 \xi'_2 \xi'_3$, sont semblables si

$$\Delta(\xi_1 \xi') = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et de même $\Delta(\eta_1 \eta'_1) = 0$ [1].

---

[1] Voir *Revue de Mathématiques spéciales*, septembre 1912.

Ceci dit, prenons M pour origine. Posons

$$\xi_A = A \ldots \xi_P = P \ldots \xi_{A'} = A', \text{ etc.}$$

Soit

$$\alpha = \frac{MC}{MB} e^{i\widehat{CMB}}, \qquad \beta = \frac{MA}{MC} e^{i\widehat{AMC}}, \qquad \gamma = \frac{MB}{MA} e^{i\widehat{BMA}},$$

on a

$$C = \alpha B, \qquad A = \beta C, \qquad B = \gamma A,$$

et

$$\frac{R - A'}{Q - A'} = \frac{1}{\alpha},$$

d'où

$$(B - C) A' = BQ - CR,$$

de même

$$(C - A) B' = CR - AP,$$
$$(A - B) C' = AP - BQ;$$

ajoutons membre à membre, il reste

$$(B - C) A' + (C - A) B' + (A - B) C' = 0$$

ou

$$\Delta(A, A') = 0.$$

Donc les deux triangles ABC, A'B'C' sont semblables. C. Q. F. D.

Remarque. — Au lieu des triangles tels que QRA' de l'énoncé, construisons des triangles tels que QRA'' intérieurement aux côtés de PQR et semblables aux triangles BCM, etc., on aura

$$\frac{R - A''}{Q - A''} = \alpha, \qquad (C - B) A'' = CQ - BR$$

ou

$$\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) A'' = \frac{Q}{B} - \frac{R}{C},$$

d'où

$$\sum \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) A'' = 0.$$

Le triangle A''B''C'' est donc semblable à celui dont les affixes sont proportionnels aux inverses de ceux de ABC. Or la transformation

$$\xi \xi' = k^2$$

donne, en développant,

$$xx' - yy' = k^2, \qquad xy' + yx' = 0,$$

elle exprime que pour deux points homologues uu', $Mu \times Mu' = k^2$ et que les rayons Mu, Mu' sont symétriques par rapport à l'axe Mx. Le triangle A''B''C'' est donc semblable à celui qu'on déduirait de

ABC par une inversion de centre M, suivie d'une symétrie autour d'une droite quelconque. De plus les quadrilatères tels que $A'RA''Q$ sont des parallélogrammes. L. Bickart.

1° Supposons d'abord que P et R coïncident, faisons de part et d'autre de la droite PQ les constructions prescrites; le triangle $A'_0PC'_0$ est semblable à ABC; en effet, l'angle en P est égal à B et l'on a, d'autre part,

$$\frac{PC'_0}{PQ} = \frac{BM}{AB}, \qquad \frac{PA'_0}{PQ} = \frac{BM}{BC},$$

donc

$$\frac{PC'_0}{PA'_0} = \frac{BC}{AB}.$$

2° Supposons maintenant que R soit sur la droite PQ, A'_0 vient en A'_1 sur QA'_0, RA'_1 étant parallèle à PA'_0, C'_0 ne varie pas et le

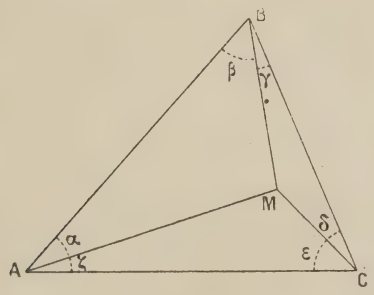


Fig. 1.

troisième sommet B'_1 se construit sur PR comme l'indique l'énoncé. Le triangle $C'_0A'_1B'_1$ est semblable à $C'_0A'_0P$. En effet

$$\widehat{C'_0PB'_1} = \beta + \varepsilon = \widehat{CMB} - A = \widehat{PA'_0Q} - A = \widehat{C'_0A'_0A'_1}.$$

D'autre part

$$\frac{PB'_1}{PR} = \frac{CM}{AC} \qquad \text{et} \qquad \frac{A'_0A'_1}{PR} = \frac{CM}{BC},$$

donc

$$\frac{PB'_1}{A'_0A'_1} = \frac{BC}{AC} = \frac{PC'_0}{A'_0C'_0}.$$

Les triangles $C'_0PB'_1$ et $C'_0A'_0A'_1$ sont donc semblables, ce qui entraîne la similitude des triangles $C'_0A'_1B'_1$ et $C'_0A'_0P$.

Relations métriques entre les triangles ABC *et* $A'B'C'$. — Soient p, q, r les côtés du triangle PQR, x, y, z les coordonnées

normales absolues de M dans le triangle ABC, on trouve pour carré du rapport de similitude des côtés du triangle A'B'C' à ceux du côté AB :

$$\frac{1}{4S^2}\left[\begin{array}{l} p^2(x^2+xy\cos C+zx\cos B-yz\cos A) \\ +q^2(y^2+yz\cos A+xy\cos C-zx\cos B) \\ +r^2(z^2+zx\cos B-yz\cos A-xy\cos C) \\ +\quad 4\Sigma xy\sin C+yz\sin A+xz\sin B \end{array}\right].$$

(S surface du triangle ABC, Σ surface du triangle PQR.)

L'expression précédente peut se simplifier par la considération du triangle podaire M. Soient σ la surface de ce triangle, λ, μ, ν les angles aux sommets situés sur les côtés BC, CA, AB; l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{\sigma}{2S^2}(p^2\cot\lambda+q^2\cot\mu+r^2\cot\nu+4\Sigma).$$

Soit S' la surface du triangle A'B'C', on a

$$S'=\frac{\sigma}{2S}(p^2\cot\lambda+q^2\cot\mu+r^2\cot\nu+4\Sigma).$$

Cas particuliers. — Quand on prend pour triangle PQR le triangle ABC lui-même, les points A', B', C' sont les symétriques de M par rapport au milieu des côtés, le triangle A'B'C' est symétrique du triangle ABC par rapport à un point M' qui est le complémentaire de M.

Quand on prend pour triangle PQR le triangle podaire de M, on a $\Sigma=\sigma$ et la formule ci-dessus se réduit à

$$S'=\frac{4\sigma^2}{S}.$$

Alors les triangles ABC et A'B'C' sont homothétiques par rapport à un point dont les coordonnées normales absolues sont :

$$\frac{a\sigma\cot\lambda}{S-\sigma\nu},\qquad \frac{b\sigma\cot\mu}{S-2\sigma},\qquad \frac{c\sigma\cot\nu}{S-2\sigma}.$$

P. Poulet.

Autre réponse de M. J. Neuberg qui sera insérée prochainement.

QUESTIONS.

4977. [**H1**] Les fonctions qui ne satisfont à aucune équation différentielle

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

où f est un polynome en $x, y, \ldots, y^{(n)}$, ont donné lieu à bien des études. Je les ai appelées « *fonctions hypertranscendantes* » (*C. R. Acad. Sc.*, 2 avril 1906, et mon *Introduction à la Théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions*, Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 242). Ces termes ont été aussi employés, récemment, par M. M. Petrovitch (*Les spectres numériques*, Paris, Gauthier-Villars, 1919).

Je désirerais savoir quels sont, en dehors de M. Moore (transcendentally-transcendental), les divers termes qui ont été utilisés pour désigner ces fonctions, et si le mot « *hypertranscendant* » a été proposé avant moi.

E. Maillet.

4978. [**K'13cβ**] La proposition suivante est-elle exacte ou déjà rencontrée ?

Est-il possible de placer les quatre sommets d'un tétraèdre régulier quelconque sur les quatre arêtes d'un angle tétraèdre donné ?

H. Brocard.

4979. [**M'2g**] Il serait intéressant de réunir les exemples connus, probablement peu nombreux, de lieux géométriques décomposables en deux courbes distinctes.

H. Brocard.

4980. [**I19c**] Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^4 + y^4 = (z^3 + u^3)(z + u).$$

Je désirerais connaître la bibliographie du problème général

$$x^m + y^m = (z^{m-1} + u^{m-1})(z + u).$$

A. Colucci (Caserte).

4981. [**V**] On demande la statistique des démonstrations de la formule d'Euler $d^2 = R^2 - 2Rr$.

A. Colucci (Caserte).

4982. [**V**] Bibliographie du problème des trois corps.

A. Colucci (Caserte).

4983. [**K9b**] En joignant un sommet d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans un cercle de rayon r, à tous les autres sommets, le faisceau de cordes ainsi obtenu est fourni par les racines de l'une des équations :

1° Pour n impair,

$$nr^{n-1} - x^2 r^{n-3} \frac{n(n^2-1^2)}{2^2.3!} + x^4 r^{n-5} \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2^4.5!}$$
$$- x^6 r^{n-7} \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{2^6.7!} + \ldots;$$

2° Pour n pair, à l'exclusion du diamètre,

$$\frac{n}{2} r^{n-2} - x^2 r^{n-4} \frac{n(n^2-2^2)}{2^3.3!}$$
$$+ x^4 r^{n-6} \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2^5.5!} - \ldots$$

Ces formules, obtenues par les Mathématiques élémentaires, sont-elles connues?

J. Pacé.

4984. [I1] Considérons la suite naturelle des nombres de 1 à n premiers

$$(1) \qquad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n$$

et au-dessous une suite quelconque de ces nombres

$$(2) \qquad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n.$$

Effectuons terme à terme la somme et la différence des suites (1) et (2) en prenant les restes (mod n) de manière à avoir des nombres compris 1 et n ; soient

$$(3) \qquad b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \ldots, \quad b_n,$$

$$(4) \qquad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots, \quad c_n$$

les deux suites obtenues.

La proposition suivante est-elle vraie ?

Pour que chacune des suites (3) et (4) comprenne tous les nombres de 1 à n, il faut et il suffit que la suite (2) soit une progression arithmétique, en d'autres termes que l'on ait

$$a_i \equiv a_0 + ki \pmod{n}.$$

Stamboul.

4985. [I3] I. Si l'on connaît toutes les racines primitives du nombre premier $p > 3$, et s'il y a un nombre impair de ces racines primitives, qui satisfont à la congruence

$$x^n \equiv n \pmod{p}$$

avec

$$n < p - 1;$$

le nombre

$$M_p = 2^p - 1 \text{ est premier.}$$

Exemple :

$$p = 5,$$

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 3;$$

on a

$$2^3 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$3 < 4$$

et

$$M_5 = 2^5 - 1 = 31 \text{ est premier.}$$

II. Si l'on connaît toutes les racines primitives du nombre premier $p > 3$, et s'il y a un nombre pair de ces racines primitives, qui satisfont à la congruence

$$x^n \equiv n \pmod{p}$$

avec

$$n < p - 1;$$

le nombre

$$M_p = 2^p - 1 \text{ est composé.}$$

Exemple :

$$p = 11,$$

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 8;$$

on a

$$\begin{array}{lcl} 2^7 \equiv 7 & \pmod{11} & 7 < 10, \\ 8^4 \equiv 4 & & 4 < 10, \end{array}$$

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 \text{ est composé.}$$

L. Valroff.

4986. [**I19**] Résoudre les équations suivantes en nombres entiers réels positifs ou négatifs :

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_1 x_2 x_3 + A^m}{y_1 y_2 y_3},$$

$$\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_1 y_2 y_3 + B^m}{x_1 x_2 x_3}.$$

A. Auric.

4987. [**K9**]. On sait (Catalan, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, 6e édition, p. 269), que, parmi les polygones dont les côtés sont des segments donnés, il y en a auxquels on peut circonscrire une circonférence. Le nombre des segments donnés étant n, combien y a-t-il de polygones différents et non semblables qui satisfont à cette condition?

G. Russo (Catanzaro).

(D'après l'italien, La Rédaction.)

4988. [**I19a**] (Σ) Pour résoudre

$$(1) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = K(X + Y + Z)$$

en entiers, on peut utiliser les formules indiquées par Ed. Lucas (*Théorie des nombres*, 1891, p. 128) pour $a = 1$, $b = 1$:

$$X = x^4 + 2xy^3, \qquad Y = y^4 + 2x^3y, \qquad Z = 3x^2y^2.$$

C'est l'identité de la *toroïde*, étudiée en particulier par Catalan en 1833 (*N. A.*, p. 553) et en 1866 (*Mélanges math.*, 1885, p. 49-54), comme je l'ai indiqué en 1911 (*sur quelques équations indéterminées*, *Soc. philom.*, p. 15-16). Elles sont déduites des formules de Cauchy (cf. *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise*, par Ed. Lucas, p. 50, ou *B. Bon.*, mars 1877, t. 10).

Exemples de (1) :

$$(\alpha) \quad x = 2, \quad y = 1, \quad X = 20, \quad Y = 17, \quad Z = 12,$$
$$20^2 + 17^2 + 12^2 = 17(20 + 17 + 12);$$
$$(\beta) \quad x = 3, \quad y = 2, \quad X = 129, \quad Y = 124, \quad Z = 108,$$
$$129^2 + 124^2 + 108^2 = 11^2(129 + 124 + 108).$$

Ici K est un carré parfait. Comme je l'ai remarqué en 1911 (*loc. cit.*), les valeurs générales de X, Y, Z donnent

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = V^2 \qquad \text{et} \qquad X + Y + Z = W^2.$$

On a donc ici une première solution de 4693 (**1916**, 221) et, l'on retrouve bien pour K la valeur de M. Rignaux

$$k = x^4 - 2x^3y + 5x^2y^2 - 2xy^3 + y^4.$$

Je demande l'étude de (1), et dans quel cas ce nombre K pourra être carré parfait. A. Gérardin.

4989. [**I19c**] J'ai trouvé comme solution de

$$x^3 + y^3 + z^3 = ku^3$$

en entiers positifs

$$x = 212, \quad y = 168, \quad z = 41, \quad k = 7, \quad u = 127;$$
$$x = 102, \quad y = 11, \quad z = 7, \quad k = 2, \quad u = 81.$$

Peut-on trouver pour k égal à 2 et à 7 des valeurs plus petites? A. Gérardin.

4990. [**I19c**] Chercher des solutions du système

$$x - y = z^3, \qquad x^3 - y^3 = u^2.$$

Exemples :

$$x = 8, \quad y = 7, \quad z = 1, \quad u = 13;$$
$$x = 74, \quad y = 47, \quad z = 3, \quad u = 549.$$

A. Gérardin.

4991. [**I19c**] Dans les *Fragmenta ex adversariis depromta* (Euler, *Opera Posthuma*, t. 1, p. 217) je trouve le n° 50 (*Problema difficillimum*) qui se ramène à résoudre en nombres entiers

$$ab(a^2 + b^2) = 2(x^4 + y^4 + z^4).$$

Je connais la solution suivante :

$$a = 334, \quad b = 19, \quad x = 136, \quad y = 60, \quad z = 15.$$

J'en désirerais une autre. A. Gérardin.

4992. [**K¹1c**] Stewart a fait connaître en 1763 le théorème suivant : *Si l'on partage la base d'un triangle en deux segments par une droite quelconque passant par le sommet, la somme des carrés des deux côtés multipliés respectivement par le segment non adjacent est égale à la base multipliée par le carré de la droite augmenté du rectangle des deux segments.*

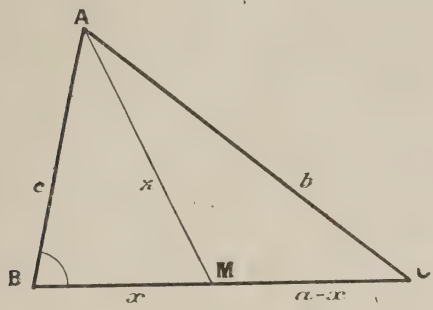
Cet énoncé peut se traduire par

$$(1) \qquad c^2(a - x) + b^2 x = a[z^2 + x(a - x)].$$

Je demande si la très simple démonstration suivante est connue :

Dans le triangle ABC, on a

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$



et dans le triangle ABM

$$\cos B = \frac{c^2 + x^2 - z^2}{2cx}.$$

En égalant ces deux valeurs de cos B, on trouve

$$x(a^2 + c^2 - b^2) = a(c^2 + x^2 - z^2),$$

expression équivalente à (1) A. Gérardin.

4993. [**B1d**] Si l'on désigne par $(x, 1, 0)$ un permanent d'éléments x, 1, 0, distribués d'une manière quelconque, on a

$$(1, x, 0) = x^{\alpha-\beta}[x, 1, 0],$$

α et β désignant respectivement le plus grand nombre de tranches parallèles privées d'éléments x et le plus grand nombre de tranches parallèles privées d'éléments 1 dans le permanent $(x, 1, 0)$, et $[x, 1, 0]$ représentant le polynome déduit de $(x, 1, 0)$ par renversement de l'ordre des coefficients. Ce théorème est encore vrai si l'on remplace le per-

manent par un pénédéterminant d'espèce quelconque, ou plus généralement encore par toute fonction F obtenue en appliquant aux termes une règle des signes quelconque.

Il résulte de ce théorème que, quelles que soient l'étendue et la forme du vide (qui peut être inexistant) et des régions des 1 et des x, l'échange de 1 et de x dans la matrice $(0, 1, x)$ est suivi d'une transformation simple de toute fonction F (x) exprimée par $(0, 1, x)$. La question qui se pose (et dont la solution nous serait utile pour certaines recherches) est de savoir s'il est possible de trouver une loi générale donnant l'effet de l'échange de 0 et de x (la région des 1 pouvant ne pas exister) ou de 0 et 1 sur la fonction F (x).

M. Lecat (Bruxelles).

4994. [**I19a**] Ayant la solution minima du système

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2 - A y^2 = pb, \\ z^2 - A t^2 = 2pb; \end{cases}$$

indiquer le procédé le plus rapide pour passer à la solution minima du système

$$(2)\qquad \begin{cases} X^2 - AY^2 = \pm b. \\ Z^2 - AT^2 = \pm 2b. \end{cases}$$

Exemple :

$$p = 3, \quad b = 11, \quad A = 1783, \quad (\text{signe} - \text{ici}),$$
$$x = 169, \quad y = 4, \quad z = 13, \quad t = 1.$$

A. Gérardin.

4995. [**I16a**] (Σ, S) J'ai les solutions inédites suivantes, choisies parmi beaucoup d'autres :

$$x^2 - 1567 y^2 = 1,$$
$$z^2 - 2711 t^2 = 1.$$

Je désirerais savoir combien de temps on mettrait à calculer

par les méthodes connues la plus petite solution de chaque équation. On pourra choisir d'autres exemples.

Je les obtiens *très rapidement* par ma méthode nouvelle (*I. M.*, **2855**, **1917**, 57; *E. M.*, 1917, 316-8; *S. Œ.*, 1917).

A. Gérardin.

4996. [**I19c**] (Σ) Chercher des identités de

$$\left[\frac{x^2+y^2}{xy}\right]^2+\left[\frac{z^2+t^2}{zt}\right]^2=\frac{K^2}{(xyzt)^2},$$

où les lettres x, y, z, t, K seront des entiers, fonctions d'une seule variable.

Exemple :

$$x=4p,\qquad y=1-p^2,\qquad z=3p^2+1,\qquad t=p^3+3p,$$

ainsi pour $p=2$

$$x=8,\qquad y=3,\qquad z=13,\qquad t=14,\qquad K=15\,914.$$

Cf. *I. M.*, **4747**, **1917**, 77, et *Comment. Arith. Coll.*, 2, p. 46, Miscellanea analytica, Problema III, du 15 novembre 1773.

A. Gérardin.

4997. [**I19a**] Ayant deux solutions fractionnaires d'une équation

$$x^2-ay^2=b, \tag{1}$$

par exemple

$$x_0=\frac{\alpha}{k},\qquad y_0=\frac{\beta}{k},\qquad x_1=\frac{\gamma}{l},\qquad y_1=\frac{\delta}{l};$$

chercher la plus petite solution *en entiers* x, y, de (1).

Ainsi

$$a=2879,\qquad b=-35,$$
$$\alpha=99,\qquad \beta=2,\qquad k=7;$$
$$\gamma=482,\qquad \delta=9,\qquad l=5;$$

généraliser.

A. Gérardin.

4998. [**I19c**] Chercher si

$$3f^4 - 4f^3g + 6f^2g^2 + 4fg^3 + 3g^4 = x^2$$

admet une solution rationnelle.

En ce cas, on aurait une solution de **4839**, **1918**, 50; **1919**, 55. A. Gérardin.

4999. [**I19a**] (Σ) Etudier le système

$$x + y + z = a^3,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^3.$$

On peut supposer a nul ou bien $\neq 0$. Voici un exemple :

$$x = 5838, \quad y = 960, \quad z = -966,$$
$$a = 18, \quad b = 330;$$

chercher d'autres solutions en nombres positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires. A. Gérardin.

5000. [**I19c**] (Σ) Chercher des nombres N, ou leurs puissances, tels que la somme des chiffres de ce nombre donne n, et qu'à son tour une certaine puissance de n donne N comme somme de ses chiffres.

Exemple :

$$\Sigma\, 38 = 3 + 8 = 11,$$
$$\Sigma\, 11^7 = 1 + 9 + 4 + 8 + 7 + 1 + 7 + 1 = 38;$$

généraliser. A. Gérardin.

RÉPONSES.

179 (**1894**, 94) (G. de Rocquigny). — *Problème des timbres-poste de Lemoine* (**1895**, 403). — Les *Mathematical Questions and Solutions from The Educational Times*, 1908-1909, vol. 15, p. 75, donnent une réponse de A.-M. Nesbitt, M. A., à la question n° 11594 du professeur Lemoine : « De combien de manières peut-on replier sur un seul une bande de p timbres-poste ? »

Traduction de la réponse : « Le dernier timbre de la bande peut toujours être plié de deux manières, excepté s'il n'y a que deux timbres, car nous pouvons supposer que le *seul* de la question est le dernier de la bande, et même qu'il est collé à la table. Ceci nous donne comme résultat 2^{p-2}; dans le cas où l'on peut replier dessus ou dessous, le résultat est 2^{p-1}. » *Zéro.*

191 (**1894**, 97) (G. Lemoine). — *Tables de décomposition en facteurs premiers* (**1895**, 40, 219; **1905**, 29). — *Cf.* 2667 (**1903**, 257) (V. Aubry) (**1903**. 328; **1904**, 103; **1905**, 45, 181) et 3141 (**1907**, 6) (*Arcitenens*) (**1907**, 116, 139, 224; **1908**, 108).

Dans les *Novi Commentarii Academiæ Scientiarum imperialis Petropolitanæ* (t. **2**, 1751), C.-N. de Winsheim a publié un article, *De numeris perfectis* (p. 68 à 99). L'auteur cite Ozanam, qui, dans les *Récré. math.* (t. **1**, p. 47), a donné une Table des nombres premiers jusqu'à 10 000; Poetius, *in Anat. numerorum adjecta introductione ad Arithmeticam, germanico idiomate impressam* 8°, 1728 ad 10000 (cf. *Lex Math.*, t. 2); Harris, *Universal English Dictionary*, ad 100 000 *in quo tamen* 30 *sphalmata, emendavit Wallisius, prouti videra est*, t. 2, *operum* (p. 511). *Tr. de combinationibus, alternationibus et partibus aliquotis;* Krugerus, *in cogitatis de algebra*, 1746, 8° ad 101 000.

Cf. mon historique dans *A. F. A. S.*, Tunis, 1913.

A. Gérardin.

416 (**1895**, 5) (G. de Rocquigny) (**1896**, 40, 69; **1907**, 247) et 3331 (**1908**, 28) (L. Hazard) (**1908**, 157, 250, 282; **1909**, 38). — *Tables*

de carrés, cubes. — Parmi les tables portatives nouvelles de carrés, je signalerai *Tabellen der Quadrate von* 1 *bis* 12 000, ..., de P. Timpenfeld, 8e édition; Dortmund, 1917. A. Gérardin.

852 (**1896**, 149; **1905**, 220) (G. Eneström). — *Guglielmo de Lunis* (**1919**, 107). — Dans sa réponse (**1919**, 107), M. M. Lecat a reproduit, sans indication de sa source, la conjecture de G. Libri (*Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, t. 2, p. 46), que G. de Lunis avait traduit le *Traité d'Algèbre* d'Aryabhatta. Mais il y a déjà 10 ans que j'ai établi (*B. M.*, [3], t. 9, 1908-09, p. 73-74) que la traduction latine attribuée à G. de Lunis dans le manuscrit S. Marco Florent, 216, p. 80a–83a, n'est qu'une copie incomplète du *Liber Maumeti filii Moysi alkiarismi de algebra et almuchabala*, publié par Libri lui-même (*loc. cit.*, t. 1, p. 253-297) et reconnu unanimement comme appartenant à Alkhouarizmi.

Dans la Note citée, j'ai fait observer aussi : 1° que, dans le manuscrit de Florence, la traduction n'est pas attribuée à G. de Lunis par le copiste lui-même ; 2° que cette attribution est incompatible avec une indication de Ghaligai (1548).

G. Eneström (Stockholm).

1257 (**1908**, 244) (G Loria). — *La courbe de Rolle* (**1909**, 247). — A ma réponse déjà négative (**1909**, 247), je m'empresse d'ajouter l'échec absolu de nouvelles investigations opiniâtres, tant de la part de M. G. Loria que sur sa demande, et qui ont fait l'objet d'un exposé de M. F. Cajori, au journal *The American Monthly*, septembre 1918 : *What is the Origin of the Name Rolle's Curve* ?

C'est ce que M. G. Loria vient d'annoncer dans un article tout récent de l'*Enseign. math.*, 1919, p. 242.

Cette dénomination injustifiée provient sans doute d'une erreur de lecture et devra donc cesser d'avoir cours. H. Brocard.

1776 (**1900**, 81) (E.-B. Escott). — *Parallélépipède oblique en nombres entiers.* — Cette question paraît vouée à un silence prolongé, car il faudrait tout d'abord la résoudre dans le cas particulier, incomparablement plus simple, du parallélépipède rectangle, pour lequel l'existence d'une solution n'a pas encore été démontrée, nonobstant les efforts tentés à son sujet. Voir question 361 (**1894**, 214) et les réponses (**1895**, 174, 420; **1896**, 227; **1900**, 198), mentionnées dans la réponse 4839 (**1919**, 55-57).

L'insuccès des recherches ci-dessus rapportées ne donne pas à espérer de réussite dans la généralisation 1776. H. Brocard.

1924 (**1900**, 308; **1914**, 103) (G. Espanet). — *Courbes associées au triangle et au tétraèdre.* — Les propriétés signalées sont des cas particuliers d'un théorème général relatif à un système de plans. On sait qu'étant donné un système de plans, il existe un point K dont la somme des carrés des distances à ces plans est un minimum et que ce point K est alors le centre des moyennes distances de ses projections sur les plans considérés. On démontre aisément que le lieu des points M tels que les directions des résultantes des distances de ces points aux plans donnés passent par un point donné P est une cubique gauche passant par P et K.

Dans le cas du triangle, on trouvera facilement l'équation en coordonnées normales de la conique, lieu correspondant de $M(x, y, z)$,

$$\Sigma xy(\alpha \cos B - \beta \cos A) + \Sigma(y^2 - z^2)\alpha \cos A = 0,$$

α, β, γ désignant les coordonnées normales du point fixe P donné; on simplifiera d'ailleurs cette recherche en remarquant que le problème revient à trouver le lieu des points $M(x, y, z)$ qui sont collinéaires avec un point fixe $P(\alpha, \beta, \gamma)$ donné et avec le centre de gravité de leur triangle podaire.

Les hyperboles équilatères obtenues ne paraissent pas jouir, en général, de propriétés importantes pour la géométrie du triangle proprement dite; mais, en les particularisant, on obtient des propositions intéressantes.

Si P coïncide avec le centre du cercle circonscrit, la conique devient l'*hyperbole équilatère, circonscrite au quadrilatère des centres des cercles tritangents, qui a pour centre le foyer de la parabole de Kiepert.*

Cette propriété permet de rattacher à un théorème général cette proposition qui a déjà été maintes fois rencontrée:

Le centre de gravité du triangle des points de contact du cercle inscrit avec les côtés appartient à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit; propriété analogue pour les cercles ex-inscrits.

D'autre part, si P coïncide avec l'orthocentre, on trouve, pour le lieu considéré, l'*hyperbole de Jerabek*, transformée par inversion de la droite d'Euler; on pourra donc énoncer ce théorème :

Les droites qui joignent les centres isogones aux centres de gravité de leurs triangles podaires respectifs se coupent en l'orthocentre du triangle. R. Goormaghtigh (Mons).

1942 (**1900**, 332; **1914**, 104) (*Rosace*). — *Théorème de Géométrie infinitésimale.* — Un arc se déplace sur une courbe plane de manière que sa corde PQ reste parallèle à la tangente en son milieu M; il s'agit de démontrer géométriquement que le rayon de courbure en M est moyen arithmétique entre les segments PR, QS interceptés sur les normales en P et Q, à partir de ces points, par la normale à l'enveloppe de PQ. Or si $d(P)$, $d(Q)$, $d(M)$ désignent les déplacements infiniment petits de P, Q, M, et φ l'angle de contingence en M, on aura

$$2\frac{d(M)}{d\varphi} = \frac{d(P)}{d\varphi} + \frac{d(Q)}{d\varphi}.$$

Le premier membre de cette relation est le double du rayon de courbure en M; d'autre part, comme φ est également l'angle de contingence de l'enveloppe de PQ, on a, d'après les formules de Mannheim (établies géométriquement),

$$\frac{d(P)}{d\varphi} = PR, \qquad \frac{d(Q)}{d\varphi} = QS$$

(*voir* Mannheim, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 48). Ces relations démontrent la propriété énoncée.

Quant à la recherche du centre de courbure de l'enveloppe de PQ, l'application des formules de Mannheim conduit facilement à une relation entre le rayon de courbure de cette enveloppe et les rayons de courbure donnés; mais cette relation est compliquée et ne semble pas donner lieu à une construction géométrique simple.

R. Goormaghtigh (Mons).

2234 (**1901**, 280; **1918**, 52) (*Rudis*). — *Aire d'un triangle.* — Soient D, D′, D″ les valeurs des déterminants qui figurent au dénominateur de l'expression Δ; si l'on permute entre elles les droites (l, m, n) (l', m', n'), ces déterminants deviennent respectivement égaux à $-D'$, $-D$, $-D''$, l'expression Δ a changé de signe. Ce signe dépend donc de l'ordre dans lequel sont pris les côtés du triangle, de même que dans l'expression de la surface d'un triangle en fonction des coordonnées des sommets (cartésiennes ou trilinéaires), le signe change suivant l'ordre dans lequel on prend ces sommets; l'analogie est complète.

De même si l'on fixe les droites (l, m, n) (l', m', n') et qu'on fasse tourner la droite (l'', m'', n'') autour d'un point du plan, on constate que l'expression Δ devient infinie et change de signe chaque fois que la droite (l'', m'', n'') devient parallèle à l'une des droites (l, m, n),

(l', m', n') et que là encore son signe dépend de l'ordre dans lequel se suivent les trois droites quand on tourne autour du triangle dans un sens déterminé

Ces remarques me paraissent éclairer complètement la question.

P. Poulet.

2258 (**1902**, 4; **1919**, 7) (G. de Rocquigny). — *Décomposition de n^6 en somme de trois hexagones et d'un triangle de rang pair.* — L'absence de réponse ou de vérification numérique tient peut-être à une obscurité de l'énoncé, car spécifier un nombre >1, puis un nombre >2, c'est sans doute retenir au moins $n=2$, et pour celui-là on a $2^6=64$, qui, diminué d'un triangle d'ordre pair

$$3 \quad 10 \quad 21 \quad 36 \quad 55,$$

donne pour restes

$$61 \quad 54 \quad 43 \quad 28 \quad 9,$$

qu'il faudra essayer de décomposer en trois hexagones, c'est-à-dire en trois triangles d'ordre impair

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 28 \quad 45.$$

D'autre part, pour $n>2$, soit pour $n=3$, d'où $3^6=729$, on devra vérifier que deux des hexagones ne sont ni égaux ni consécutifs.

Je ne veux pas m'y arrêter davantage. H. Brocard.

Autre réponse de M. J. Pacé.

2286 (**1902**, 36; **1919**, 8) (G. de Rocquigny). — *Somme des n premiers cubes impairs* (**1919**, 77, 109). — Ma réponse (**1919**, 109) présente une lacune dans : 2° $m=a^2+b^2$, pour le cas particulier où $a=b$. Les deux premiers carrés ainsi obtenus s'annulent alors, et la démonstration est en défaut. Mais on peut opérer ainsi dans ce cas :

Si $m=2a^2$,

$$\begin{aligned}(m+1)^2(2m^2+4m+1) &= (4a^4+4a^2+1)(8a^4+8a^2+1)\\ &= (4a^4+2a^2)^2+(4a^4+2a^2)^2+(4a^3+2a)^2\\ &\quad +(4a^3+2a)^2+(2a^2)^2+(2a)^2+1.\end{aligned}$$

On en déduit comme corollaire :

$$\begin{aligned}2n^4=2(4a^4+4a^2+1)^2 &= (4a^4+2a^2)^2+(4a^4+2a^2)^2\\ &\quad +(4a^3+2a)^2+(4a^3+2a)^2\\ &\quad +(2a^2+1)^2+(2a^2)^2+(2a^2)^2+1.\end{aligned}$$

La troisième partie revient à la deuxième pour chacun des cas particuliers :

$$a = b + c; \qquad b = a + c; \qquad c = a + b.$$

J. Pacé.

2855 (**1904**, 285) (E. Maillet). — *Erreurs des mathématiciens* (**1919**, 110 et les renvois antérieurs). — Voici une inadvertance de Salmon, *Traité des coniques* p. 608 de l'édition française de 1884 :

« Savoir que la courbe est une hyperbole équilatère équivaut à deux conditions, car cela revient à dire que chacun des points cycliques se trouve sur la polaire de l'autre par rapport à la conique. »

P. Hendlé.

2944 (**1905**, 172) (Fitz-Patrick). — *Au sujet du Journal des Sciences mathématiques de A. Labosne* (**1906**, 28, 151).

Voici les renseignements trouvés dans les *Mélanges mathématiques de A. Labosne*, qui m'ont été obligeamment prêtés par M. Leclerc.

Ce journal a été édité en 1872 par la Librairie centrale des Sciences, 13, rue de Seine, à Paris; le directeur-gérant était G. Huberson.

Quelques feuilles du *Journal des Sciences mathématiques* nous fournissent des renseignements :

Le n° **2** (1re année), de février 1872, contenait les articles suivants :

Sur les nombres qui sont la somme de deux carrés, par A. L., p. 17-25 (analyse des travaux d'Euler).

Problème sur la sphère, par A. Hermann., prof. de math., p. 26 (incomplet).

Dans le n° 3, de mars 1872, se trouvent :

Sur la numération, par A. L., p. 33 à 36.

Note sur la racine cubique, par A. L., p. 37 à 38.

Sur le tronc de pyramide de deuxième espèce, p. 38 à 40.

Le n° **4**, d'octobre 1872, contenait :

Application ingénieuse des diviseurs des nombres, par A. L., p. 49 à 51.

Variation du trinome $ax^4 + bx^2 + c$, par A. L., p. 51 à 55.

Problème de combinaison, par A. L., p. 56 à 57.

Usage des chiffres terminants dans les opérations inverses, par A. L., p. 58 à 60 (la suite de cet article est en manuscrit, 4 pages).

Des invariants dans les équations des coniques (7 pages en manuscrit, signature A. L., la fin manque; cette première partie a été peut-être éditée).

Il n'est plus parlé dans le reste du manuscrit du *Journal des Sciences mathématiques*, mais on trouve dans le Cahier 2 des *Mélanges mathématiques*, sous le faux-titre *Revue mathématique de l'Enseignement secondaire*, n° ..., divers intéressants extraits. *Cf.* ci-dessus ma réponse à 1822 (**1919**, 137). A. GÉRARDIN.

3393 (**1908**, 121) (E.-B. ESCOTT). — *Diviseurs de certains nombres* (**1909**, 156). — Depuis ma réponse (*loc. cit.*), aucun collaborateur n'ayant étudié cette question, j'avais poursuivi mes calculs pour trouver d'autres nombres *premiers* p tels que $(p^2-1)^2$ ait *quatre* facteurs de forme $px+1$ avec $x<p$ (et $x\neq 0$); il est évident que, pour $x=1$, on a un facteur double. Je n'ai pas trouvé d'autre nombre p inférieur à 462 000, mais j'en ai noté plusieurs *possibles* inférieurs à 10 millions.

J'ai rencontré depuis lors, dans les *Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times*, 1908-1909, vol. 15, p. 82-83, la réponse par M. E.-B. Escott à sa question n° 16460, semblable à 3393. En voici la traduction abrégée :

En posant

$$(1)\qquad (p^2-1)^2=(px+1)(py+1),$$

on voit que

$$x+y=pz,$$

puis

$$(2)\qquad z=\frac{p^2+x^2-2}{px+1},$$

où p et x sont permutables sans changer z. Considérant (2) comme une équation en x, nous avons

$$x_1+x_2=pz \qquad \text{et} \qquad x_2=pz-x_1.$$

Puisqu'on peut permuter p et x, nous pouvons poser

$$x'_1=p, \qquad p'=pz-x_1.$$

De même,

$$x'_2=p'z-p=(pz-x_1)z-p,$$

et comme ci-dessus

$$x''_1=p', \qquad p''=p'z-p.$$

Nous voyons que dans la suite récurrente

$$(3) \qquad P_n = x_1, \quad p_1, \quad p_1 z - x_1, \quad \ldots,$$

dont l'échelle de récurrence est

$$P_{n+2} = z, \quad P_{n+1} - P_n,$$

deux termes consécutifs quelconques donneront des valeurs pour x et p, (x_1 et p_1) étant une solution de (1).

Pour toute valeur de p, on aura les solutions évidentes

$$x = 1, \quad x = p - 2, \quad z = p - 1, \quad z = 2.$$

Donc pour tout nombre premier p de la série

$$(4) \qquad P_n : 1, \quad x, \quad x^2 - x - 1, \quad x^3 - 2x^2 - x + 1, \quad \ldots,$$

où la formule de récurrence est

$$P_{n+2} = z P_{n+1} - P_n,$$

le nombre $(p^2 - 1)^2$ a *trois* diviseurs de la forme cherchée. Et s'il se trouve le même nombre p dans deux séries (sauf la première), la valeur correspondante de $(p^2 - 1)^2$ aura *quatre* diviseurs. M. Escott a trouvé ses sept valeurs (**1908**, 121) en égalant d'abord deux des termes de (4)

$$(5) \qquad x^3 - 2x^2 - x + 1 = y^2 - y - 1.$$

Cette condition peut s'écrire

$$(6) \qquad 4x^3 - 8x^2 - 4x + 9 = (2y - 1)^2,$$

en donnant alors six solutions sur les sept indiquées.

A. Gérardin.

3474 (**1908**, 272) (G. Hitrovo). — *Un horoscope attribué à Euler.* — Il est douteux qu'une réponse puisse être donnée, surtout après les bouleversements survenus en Russie.

Voici pour l'instant le titre d'un Ouvrage qui probablement fournirait une indication utile : *La Cour de l'impératrice Catherine II : ses collaborateurs et son entourage.* Saint-Pétersbourg, 1899.

L'histoire des grands personnages est, à la longue, enjolivée et

déformée d'anecdotes savamment intercalées et qui la font insensiblement déverser dans le roman. Il y a aussi des témoignages inaccessibles au vulgaire et connus seuls de quelques privilégiés, qui omettent ou négligent leurs preuves; et un jour arrive où le public reste pour jamais démuni de tout moyen de vérification. Les auteurs à imagination vive invoquent des références inédites qui trop souvent ne sont que des légendes. H. Brocard.

3698 (**1910**, 121) (H. Brocard). — *Bibliographie de Rolle* (1652-1749). — Aucune réponse n'étant parvenue, je saisis l'occasion de signaler un article de M. G. Loria paru dans l'*Enseign. math.*, 1919, p. 237-244, intitulé : *Les noms et les choses; remarques sur la nomenclature mathématique*, où il est incidemment fait mention de Rolle, à propos de la dénomination, reconnue injustifiée, de « courbe de Rolle », donnée par *Elgé* (G. de Longchamps), à la cubique

$$xy^2 = a(x+y)^2$$

(voir *I. M.*, **1909**, 247).

Quant à la bibliographie de Rolle, je n'ai réussi à rencontrer que douze ou treize articles du *Journal des Savans*. du 13 avril 1702 au 11 juin 1705, dont je ne crois pas utile de réunir ici les titres.

H. Brocard.

3717 (**1910**, 148) (M. Lecat). — *Extrémer le nombre des termes de permanents troués.* — I. Considérons d'abord le maximé :

1° Si le vide, non supposé d'étendue E, non supérieure à l'ordre de la matrice, est une transversale, le nombre des termes, T, est maximé parce que le mineur de chaque zéro contient le restant du vide. (Une transversale est formée de points dont les éléments appartiennent à un même terme.)

2° Plus généralement, quelle que soit l'étendue du vide, par rapport à l'ordre, T est manifestement maximé par une disposition des zéros suivant le plus possible de plus grandes transversales.

Le vide maximant pourrait être dit *transversal*.

Par exemple, pour $n = 3$, $p = 4$, $E = 10$, on a la matrice

$$\left|\begin{matrix} 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} . & . & . & . \\ . & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} . & . & . & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 \end{matrix}\right|,$$

où les points représentent les éléments de valeurs quelconques. Le

nombre des termes (maximé) est 320; pour E = 20, la matrice

$$\left|\begin{matrix} o & . & . & o \\ . & . & . & . \\ o & . & o & . \\ o & . & . & o \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} . & . & . & . \\ . & o & o & . \\ . & o & o & . \\ . & o & . & o \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} o & . & o & . \\ . & o & o & . \\ . & o & o & . \\ . & . & . & . \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} o & . & . & o \\ . & o & . & o \\ . & . & . & . \\ o & . & . & o \end{matrix}\right|,$$

qui constitue une solution, donne 132 termes.

II. Pour *minimer* T, il faut qu'une tranche soit vide ou que tous les zéros y soient contenus. Dans le premier cas, T est nul, quelle que soit l'étendue E du vide; dans le second cas,

$$T = (p^{n-1} - E)\,[(p-1)!]^{n-1}.$$

La solution du 3° de la question résulte de celle du 2°.

On pourrait généraliser pour les permanents de genre différents de la classe.

M. Lecat.

3807 (**1911**, 4) (E. Miot). — *Composition du nombre*

$$N = 10\,091\,401 \qquad (\mathbf{1911}, 256).$$

Les *Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times*, 1908-1909, vol. 13-14-15, ont donné, page 43, la réponse à la question 16206 posée par M. Stuart, M. A., *D. Sc.*, équivalente à celle de M. Miot. Cette réponse de M. le lieutenant-colonel Allan Cunningham peut se résumer ainsi :

En utilisant les nombres *idoines*, on sait qu'un nombre

$$N = t^2 + Du^2 \qquad (\text{où D est idoine})$$

est premier (ou puissance de premier) si l'on ne trouve pas une deuxième représentation de N sous la même forme.

Le nombre N est premier, car on a

$$N = 1251^2 + 2920^2 = 2861^2 + 1320.38^2.$$

J'ajoute que l'on connaît 65 nombres *idoines positifs*, inférieurs à 100 000. Ce sont les nombres

$$D = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ 840,\ 1320,\ 1365 \text{ et } 1848,$$

dont Euler s'était occupé (*C. A. C.*, 2, 270).

A. Gérardin.

3890 (**1911**, 147) (G. Petit-Bois). — *Pendule d'Airy.* — Bien qu'une réponse n'ait pas encore paru, la question a donné le sujet de très intéressantes expériences de la part de M. Petit-Bois et de plusieurs professeurs belges, entre autres de MM. Lhoest, Dehalu, Chalon et Lagrange.

Un dispositif de laboratoire a été improvisé, avec lequel on a obtenu des graphiques d'une remarquable perfection, qui mériteraient d'être reproduits et publiés en photogravure.

Je serai heureux de contribuer à leur réalisation.

Le trait continu de la courbe est inscrit dans des parallélogrammes et représente, comme on le sait, des variétés de courbes de Lissajous.

En 1911, le pendule d'Airy pour lesdites figures était livré, au prix de 45^{fr}, par Leybold, à Cologne.

C'est dire que ce dispositif pourra être construit à peu de frais.

H. Brocard.

4012 (**1912**, 97) (Paulmier). — *Une formule de Phillips.* — Le retard à une réponse tient sans doute à l'absence d'indication de la source de la formule rapportée dans l'énoncé. Il serait donc à désirer que celui-ci fût complété par quelque donnée bibliographique ou chronologique de nature à préciser l'investigation dans les études de Phillips sur le spiral réglant, publiées, aux *Comptes rendus*, de 1868 à 1879 (tomes 66, 67, 73, **74**, 77, 86 et 88), en 1860 au *Journal de Liouville*, et en 1881 au *Journal de l'École Polytechnique*, 49e Cahier.

Il est à présumer que l'on trouverait dans l'une d'elles les éléments de la démonstration désirée, à moins qu'elle ne soit, plus simplement, dans un Ouvrage de Phillips publié en 1880, *Sur le spiral réglant des chronomètres et des montres;* in-4°, 5 planches.

H. Brocard.

4037 (**1912**, 125) (H.-B. Mathieu). — *Équation indéterminée* (**1912**, 211). — Pour résoudre

$$N = XYZ = ABC,$$
$$X + Y + Z = A + B + C,$$

je pose

$$X = ab, \qquad Y = cd, \qquad Z = ef, \qquad A = ad, \qquad B = be, \qquad C = cf.$$

Il reste

$$a(b - d) + c(d - f) = e(b - f).$$

Donc

$$c = a + x, \qquad e = a + y,$$
$$x(d - f) = y(b - f),$$
$$x = b - f, \qquad y = d - f,$$
$$c = a + b - f, \qquad e = a + d - f.$$

On aura donc les six inconnues en fonction de quatre indéterminées, a, b, d, f.

Ainsi la forme du nombre N sera

$$N = abdf(a + b - f)(a + d - f).$$

Exemple :

$$a = n, \quad b = n + 1, \quad c = 1, \quad d = n + 2, \quad e = 2, \quad f = 2n,$$
$$N = 4n^2(n + 1)(n + 2),$$
$$N = (n^2 + n)(n + 2)(4n) = (n^2 + 2n)(2n + 2)(2n),$$
$$(n^2 + n) + (n + 2) + (4n) = (n^2 + 2n) + (2n + 2) + (2n).$$

A. Gérardin.

4170 (**1913**, 27) (Rodallec). — *Diviseurs d'un nombre* A *déduits du développement de* $\sqrt{A}$ *en fraction continue.* — La règle indiquée ici n'est nullement générale et elle est fort loin de souffrir comme seules exceptions certains nombres de la forme $4n + 1$: c'est de quoi l'on peut facilement se convaincre par l'exemple des nombres

$$A = 119, 123, 171, 187, \text{etc.}$$

Il est certain que le calcul de *toutes* les décompositions

$$Q^2 + PR = A$$

entraîne la connaissance de *tous* les diviseurs du nombre A ; mais lorsque le but principal est la simple découverte de ces diviseurs, il n'est rien moins qu'indiqué de procéder de la sorte.

Pour qu'il en fût autrement, il faudrait que du développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue on pût du moins passer régulièrement au développement de $\sqrt{\frac{A}{\delta^2}}$, δ étant diviseur de A ; mais s'il en est souvent ainsi, il est des cas non moins fréquents où cela est impossible : aussi, bien que j'aie tout particulièrement examiné cette question, il ne m'a point paru en définitive que l'on pût songer à

établir, sur cette base, une recherche *méthodique* des diviseurs des nombres.

E. Malo.

4274 (**1913**, 219) (*Elgnairt*). — *Triangles dont les trois côtés et les trois médianes sont des entiers* (**1914**, 43). — *Cf.* aussi L. Euleri, *Opera Posthuma*, **1**, 102 (fragmenta).

A. Gérardin.

4407 (**1914**, 123) (E.-N. Barisien). — *Équation*

$$2\sqrt{x+7-\sqrt{6x+30}}-\sqrt{10-2x}-\sqrt{3}(x+1)=0$$

(**1915**, 62; **1916**, 19). — L'auteur de la question, dans l'énoncé, et M. Brocard, dans sa réponse (**1915**, 62), signalent que $+\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ sont des racines de l'équation proposée; on vérifie aisément que $+\sqrt{5}$ est bien racine de l'équation obtenue en débarrassant l'équation donnée de ses radicaux, *mais non de l'équation proposée*

R. Goormaghtigh (Mons).

4422 (**1914**, 147) (L. Mongardon). — *Développement d'une certaine série.* — Dans l'énoncé, il est fait mention d'une *période imaginaire* (e^x-1), ce qui est inintelligible.

Aucune rectification de cette erreur typographique n'étant survenue, la question semble avoir été retirée et il est impossible de la traiter.

H. Brocard.

4480 (**1915**, 73) (Prompt). — *L'Astronomie et les littérateurs.* — On ne peut s'attendre à vérifier que l'imagination des romanciers et des poètes soit d'accord avec les éléments de la Physique ou de l'Astronomie. Des exemples sont aisés à réunir, et je pourrais en rapporter.

H. Brocard.

4481 (**1915**, 74) (*Quærens*). — *Construction du quatrième point d'intersection de deux coniques déterminées chacune par cinq points, dont trois communs* (**1915**, 215, 233). — En plus de la solution par inversion isogonale, écartée par l'auteur de la question, et des quatre solutions basées sur les propriétés homographiques des coniques, déjà publiées par l'*I. M.* (**1915**, 215 et 233, et **1919**, 11, à la fin de la réponse à la question 2087), en voici une sixième entièrement différente :

Construire le centre O de la conique ABCKL, et le centre ω de la conique ABCPQ; ces deux centres, avec les milieux A', B' et C'

des côtés du triangle ABC, définissent la conique, lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère cherché ABCD.

La conique $A'B'C'O\omega$ recoupe BC en A'', CA en B'', AB en C'', et les trois droites AA'', BB'' et CC'' concourent au point D demandé.

P. Hendlé.

4508 (**1915**, 104) (A. Gérardin). — *Équation indéterminée.* — Pour résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^3 - 23x - 121 = y^2,$$

on calcule les formes de x par rapport aux modules 4, 8, 3, 7 et 5, pour commencer.

On voit que

$$x \not\equiv 1, 3 \pmod 5$$

et qu'il doit avoir l'une des formes suivantes :

$$x \text{ pair} = 168\,K + 2,\ 26,\ 50,\ 58,\ 82,\ 106\,;$$
$$x \text{ impair} = 84\,K + 1,\ 5,\ 29,\ 37,\ 61,\ 65.$$

Je n'ai pas trouvé de solution pour $x < 150$.

A. Gérardin.

4509 (**1915**, 104) (A. Gérardin). — *Équation indéterminée.* — Cette question de résoudre en entiers (positifs)

$$x^3 + 4x + 116 = y^2$$

est l'une des plus intéressantes rencontrées jusqu'à ce jour dans l'étude des équations de la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = y^2.$$

On voit facilement, par le simple examen des modules 4, 8, 3, 5, 7, que x impair est de l'une des formes

$$x \not\equiv 2 \pmod 5,$$
$$x = 168p + 1,\ 17,\ 25,\ 49,\ 73,\ 89,\ 113,\ 137,\ 145,\ 161.$$

Il n'y a pas d'autre solution que l'unité pour $x < 500$.

Le calcul se fait d'une façon si rapide que je n'ai même pas construit mes bandes modulaires, ni utilisé des modules premiers supérieurs à 7.

Les formes pour x *pair* sont :

$$x \neq 2 \pmod 5,$$

$$\begin{aligned} x = 168p + {} & 4, 10, 14, 22, 26, 28, 38, 46, \\ & 50, 52, 54, 68, 70, 74, 82, 92, \\ & 94, 98, 106, 110, 116, 122, 124, 130, \\ & 134, 140, 148, 154, 158, 164, \end{aligned}$$

et l'on trouve ainsi les nouvelles solutions suivantes :

$$\begin{aligned} x &= 4, \quad 10, \quad 14, \quad 50, \quad 70, \\ y &= 14, \quad 34, \quad 54, \quad 354, \quad 586. \end{aligned}$$

Il n'y en a pas d'autre pour x inférieur à 500. Il serait intéressant de poursuivre l'étude de cette équation, qui admet déjà *neuf* solutions entières. A. Gérardin.

4540 (**1915**, 170) (*Um. Alemtejano*). — *Variétés d'équations de Fermat.* — L'objet de la question est de prouver l'existence de solution immédiate, suivant la composition littérale de f non carré, des équations :

1° $$x^2 - fy^2 = 1$$

pour

$$f = a^{2n} \pm a^m \qquad \text{et} \qquad f = a^2 \pm \frac{1}{r};$$

2° $$x^2 - fy^2 = -1$$

pour

$$f = a^2 + b^2 \qquad \text{et, par exemple, pour} \qquad f = a^2 + 4.$$

Les vérifications proposées sont d'ailleurs très faciles.

Lorsque f est un nombre, le problème est assez simple pour certaines formes telles que $f = a^2 \pm 1$, $a^2 \pm 2$, ..., comme cela a été déjà indiqué. *Voir* par exemple *N. C.*, 1878, 339.

Si f est un binome ou un trinome, on tirera aisément une solution du développement de $\sqrt{f}$ en fonction continue. C'est de la sorte qu'a procédé M. Boutin dans une étude publiée en 1905, puis en 1908 (*A. F.*, Clermont-Ferrand).

J'y rencontre, pour $a = 2p + 1$, l'expression

$$\sqrt{(2p+1)^2 + 4} = (2p + 1, p, 1, 1, p, 4p + 2)$$

avec une foule d'autres résultats.

Je crois que les solutions littérales de l'énoncé sont nouvelles; en tout cas, elles fournissent une série étendue de solutions immédiates pour une très grande classe d'équations. H. Brocard.

4732 (**1917**, 49) (A. Gérardin). — *Sur l'équation*

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = z^2$$

(**1918**, 18; **1919**, 83, 115). — Les quatre premières équations proposées ayant $a = e$, $b = d$ se transforment, par la substitution $x = X + Y$, $y = X - Y$, en

$$(2a + c + 2b)X^4 + (12a - 2c)X^2Y^2 + (2a + c - 2b)Y^4 = z^2.$$

α. Soient

$$a = e = 1, \qquad b = d = 68, \qquad c = -122;$$

$$x = \frac{1}{2}(u) + \frac{1}{4}(v), \qquad y = \frac{1}{2}(u) - \left(\frac{1}{4}\right)v,$$

il vient

$$z^2 = u^4 + 4u^2v^2 - v^4 = (u^2 + 2v^2)^2 - 5v^4.$$

Soient d'abord

$$v = 2mn,$$

$$u^2 + 2v^2 \pm z = 2m^4 \quad \text{ou} \quad 8m^4,$$

$$u^2 + 2v^2 \mp z = 40n^4 \quad \text{ou} \quad 10n^4;$$

d'où

$$u^2 + 2v^2 = m^4 + 20n^4, \qquad \pm z = m^4 - 20n^4$$

ou

$$u^2 + 2v^2 = 4m^4 + 5n^4, \qquad \pm z = 4m^4 - 5n^4.$$

Dans le premier cas, on a

$$u^2 = m^4 - 8m^2n^2 + 20n^4 = (m^2 - 4n^2)^2 + 4n^4,$$

et par suite

$$n = ab,$$

$$u + (m^2 - 4n^2) = 2a^4, \qquad u - (m^2 - 4n^2) = 2b^4,$$

$$u = a^4 + b^4, \qquad m^2 - 4n^2 = a^4 - b^4,$$

$$m^2 = a^4 + 4a^2b^2 - b^4,$$

équation identique à la proposée.

Dans le deuxième cas, on a

$$u^2 = 4m^4 - 8m^2n^2 + 5n^4 = (2m^2 - 2n^2)^2 + n^4,$$

et par suite

$$n = ab,$$

$$u + (2m^2 - 2n^2) = a^4, \qquad u - (2m^2 - 2n^2) = b^4;$$

$$2u = a^4 + b^4, \qquad 2(2m^2 - 2n^2) = a^4 - b^4,$$

$$4m^2 = a^4 + 4a^2b^2 - b^4,$$

équation encore identique à la proposée; on voit donc que toute solution de cette équation avec v pair se déduit d'une solution de la même équation, en nombres plus petits, au moyen des relations ci-dessus.

Exemples :

$$m = a = 1, \qquad b = 2; \qquad u = a^4 + b^4 = 17, \qquad n = ab = 2;$$

$$v = 2mn = 4, \qquad z = 20n^4 - m^4 = 319$$

ou

$$2m = 2, \qquad a = b = 1, \qquad u = \frac{1}{2}(a^4 + b^4) = 1, \qquad n = ab = 1;$$

$$v = 2mn = 2, \qquad z = 5n^4 - 4m^4 = 1.$$

Soient maintenant

$$v = mn \text{ impair},$$

$$u^2 + 2v^2 \pm z = m^4, \qquad u^2 + 2v^2 \mp z = 5n^4,$$

$$u^2 + 2v^2 = \frac{1}{2}(m^4 + 5n^4), \qquad \pm z = \frac{1}{2}(m^4 - 5n^4),$$

$$2u^2 = m^4 - 4m^2n^2 + 5n^4,$$

$$u^2 = \left(\frac{m^2 - 3n^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{m^2 - n^2}{2}\right)^2;$$

d'où

$$\frac{1}{2}(m^2 - 3n^2) \text{ impair}, \qquad \frac{1}{2}(m^2 - n^2) = 2ab,$$

$$u + \frac{1}{2}(m^2 - 3n^2) = 2a^2, \qquad u - \frac{1}{2}(m^2 - 3n^2) = 2b^2,$$

$$u = a^2 + b^2, \qquad \frac{1}{2}(m^2 - 3n^2) = a^2 - b^2,$$

$$a = eg, \qquad b = fh, \qquad m - n = 2ef, \qquad m + n = 2gh,$$

$$m = ef + gh, \qquad n = gh - ef,$$

$$2(e^2g^2 - f^2h^2) = (ef + gh)^2 - 3(gh - ef)^2,$$

$$e^2(g^2 + f^2) - h^2(f^2 - g^2) - 4efgh = 0,$$

$$\frac{e}{h} = \frac{2gf \pm \sqrt{f^4 + 4f^2g^2 - g^4}}{g^2 + f^2};$$

on a donc nécessairement

$$f^4 + 4f^2g^2 - g^4 = K^2,$$

c'est-à-dire encore une équation identique à la proposée; on voit donc encore que toute solution de cette équation avec v impair se déduit d'une solution de la même équation en nombres plus petits, au moyen des dernières relations ci-dessus.

Exemples :

$$f = 1, \quad g = 0, \quad e = 1, \quad h = 1, \quad m = -n = 1.$$
$$a = 0, \quad b = 1, \quad u = 1, \quad v = 1, \quad \pm z = 2.$$

Il en résulte que toutes les solutions de l'équation proposée s'obtiennent de proche en proche au moyen des méthodes ci-dessus et en partant de la solution $u = 1$, $v = 0$.

β. Soient

$$a = e = 1, \quad b = d = -2, \quad c = 5,$$
$$x = u + v, \quad y = u - v;$$

il vient

$$3u^4 + 2u^2v^2 + 11v^4 = z^2,$$

et l'on peut supposer u et v premiers entre eux; posons

$$n = u^2 - v^2, \quad m = u^2 + 3v^2;$$

d'où m et n premiers entre eux ou ayant 4 comme plus grand commun diviseur :

$$u^2 = \frac{1}{4}(3n + m), \quad v^2 = \frac{1}{4}(m - n), \quad z^2 = m^2 + 2n^2,$$

et par suite, pour r et s premiers entre eux,

$$n = 2trs, \quad z \pm m = 2tr^2, \quad z \mp m = 4ts^2,$$
$$z = t(r^2 + 2s^2), \quad \pm m = t(r^2 - 2s^2),$$
$$4v^2 = m - n = \pm t[(r \mp s)^2 - 3s^2];$$

ceci exige d'abord $t = 4$, puisque $t = 1$ ou 4 et puisque $(r \mp s)^2 - 3s^2$ n'est jamais divisible par 4 et, par suite, ceci exige le signe supérieur puisque 3 ne peut diviser une somme de deux carrés premiers entre

eux ; on a donc

$$m = r^2 - 2s^2,$$
$$u^2 = r^2 + 6rs - 2s^2 = (r + 3s)^2 - 11s^2,$$
$$v^2 = r^2 - 2rs - 2s^2 = (r - s)^2 - 3s^2;$$

d'où, pour $s = 2ab = 2cd$,

$$(r + 3s) \pm u = 2a^2, \qquad (r + 3s) \mp u = 22b^2,$$
$$(r - s) \pm v = 2c^2, \qquad (r - s) \mp v = 6d^2,$$
$$r - 3s = a^2 + 11b^2, \qquad \pm u = a^2 - 11b^2,$$
$$r - s = c^2 + 3d^2, \qquad \pm v = c^2 - 3d^2,$$

ou, pour $s = ab = cd$ impair,

$$(r + 3s) \pm u = a^2, \qquad (r + 3s) \mp u = 11b^2,$$
$$(r - s) \pm v = c^2, \qquad (r - s) \mp v = 3d^2;$$
$$r + 3s = \frac{1}{2}(a^2 + 11b^2), \qquad \pm u = \frac{1}{2}(a^2 - 11b^2),$$
$$r - s = \frac{1}{2}(c^2 + 3d^2), \qquad \pm v = \frac{1}{2}(c^2 - 3d^2),$$

et par suite, dans les deux cas,

$$a = ef, \qquad b = gh, \qquad c = eg, \qquad d = fh,$$
$$e^2f^2 + 11g^2h^2 = e^2g^2 + 3f^2h^2 + 8efgh,$$
$$h^2(11g^2 - 3f^2) - e^2(g^2 - f^2) - 8efgh = 0,$$
$$\frac{h}{e} = \frac{4gf \pm \sqrt{3f^4 + 2f^2g^2 + 11g^4}}{11g^2 - 3f^2}.$$

On a donc nécessairement

$$3f^4 + 2f^2g^2 + 11g^4 = K^2,$$

c'est-à-dire une équation identique à la proposée; donc toute solution de cette équation se déduit d'une solution de la même équation en nombres plus petits, au moyen des relations ci-dessus, et toutes les solutions ci-dessus s'obtiennent de proche en proche en partant de la solution $u = v = 1$.

Exemples :

$$f = g = 1, \qquad K = 4, \qquad h = e = 1, \qquad a = b = c = d = 1,$$
$$u = \frac{1}{2}(11b^2 - a^2) = 5, \qquad v = \frac{1}{2}(3d^2 - c^2) = 1, \qquad z = 14,$$

ou

$$f = 5, \quad g = 1, \quad K = 44, \quad h = -3, \quad e = -8,$$
$$a = -40, \quad b = -3, \quad c = -8, \quad d = -15,$$
$$u = a^2 - 11b^2 = 1501, \quad v = 3d^2 - c^2 = 611,$$
$$s = 2ab = 240, \quad r = c^2 + 3d^2 + s = 979,$$
$$z = 4(r^2 + 2s^2) = 4\,294\,564.$$

L. Aubry.

4759 (**1917**, 98) (Prompt). — *Une aire du cercle dans le papyrus d'Ahmès.* — D'après une communication de l'auteur de la question, les relations numériques attribuées par les pythagoriciens aux principes de la musique ont été systématiquement fondées sur l'intervention exclusive des puissances de 2 et de 3. Il a donc été naturel de vouloir les étendre aux bases mêmes de la Géométrie élémentaire.

H. Brocard.

4761 (**1917**, 99) (H. Brocard). — *Jeu de Halma* (**1918**, 62; **1919**, 46). — C'est bien naïvement que j'ai proposé la question sur le jeu de Halma, sinon renouvelé des Grecs, du moins ainsi nommé du grec. La réponse décisive de M. Gérardin (**1919**, 121), remontant à la source originale, me force d'avouer qu'en cette occasion, j'ai pris le Pirée pour un nom d'homme. J'aurai ainsi apporté, sans y penser, une utile contribution à la liste, combien justifiée, des Pirées mathématiques (question 3699, **1910**, 122). H. Brocard.

4793 (**1918**, 2) (F. Balitrand). — *Approximation* $\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4$ (**1918**, 87). — Ce rapport de deux puissances de 2 et de 3 doit se rattacher à l'intervention systématique de ces deux nombres dans les relations numériques découvertes par les Grecs entre les notes de la musique.

Son approximation avec le nombre π aura ainsi reçu une base plus solide pour les philosophes, mais elle peut nous paraître aujourd'hui moins justifiée. H. Brocard.

4818 (**1918**, 27) (M. Rignaux). — *Sur une question d'algèbre* (**1919**, 17). — Euler lui-même a donné, dans son article : *Resolutio formulæ Diophanteæ*,

$$ab(m\,aa + n\,bb) = cd(m\,cc + n\,dd)$$

per numeros rationales [*N. Acta*, 13, 1795, 1796, p. 45; *Exhib.*,

1778 déc. 17; *Comment. Arith. Coll.*, 2, 281-293, § 30, p. 289], le théorème suivant :

« Si quatuor numeri a, b, c, d, ita fuerint comparati, ut sit

$$ab(aa+bb)=cd(cc+dd)$$

tum si inde formentur isti quaterni numeri

$$A=(a+b)+(c+d),\qquad B=(a+b)-(c+d),$$
$$C=(a-b)+(c-d),\qquad D=(a-b)-(c-d),$$

erit quoque

$$AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2).$$

Hinc igitur patet pro qualibet solutione semper dari adhuc aliam ipsi conjugatam, ope hujus theorematis inveniendam, ita ut perpetuo binæ solutiones conjugatæ exhiberi queant, quæ ita invicem sunt connexæ, ut ope theorematis altera ex altera definiatur. »

Euler aurait donc dû trouver les nouvelles formules du septième degré obtenues par moi en octobre 1915 à l'aide de ma méthode universelle (*Cf.* **4734**, **1917**, 51) et retrouvées ensuite par M. Rignaux, à l'aide de la présente méthode. A. Gérardin.

4844 (**1918**, 94) (H. Brocard). — *Développements de e en séries rapidement convergentes* (**1919**, 57). — Je crois qu'il est possible d'obtenir une foule de telles séries et d'en construire d'aussi convergentes que l'on désire.

Soit, par exemple,

$$e-2=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots.$$

Écrivant les termes par groupes de deux, on aura

$$\frac{1}{n-1!}+\frac{1}{n!}=\frac{n+1}{n!},$$

et posant $n=2$, $m+1$, on obtiendra

$$e-2=2\left[\frac{2}{3!}+\frac{3}{5!}+\ldots+\frac{m+1}{2m+1!}+\ldots\right].$$

Groupant par trois, on aura

$$\frac{1}{n-1!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n+1!}=\frac{(n+1)^2+1}{n+1!},$$

et posant $n = 3m$, il viendra

$$e - 2 = \frac{19}{4!} + \frac{50}{7!} + \ldots + \frac{(3m+1)^2+1}{3m+1!} + \ldots.$$

Groupant par quatre, et posant $n = 4, m - 1$, on aura

$$e - 2 = \frac{86}{5!} + \frac{586}{9!} + \ldots + \frac{(4m+1)(16m^2+1)+1}{4m+1!} + \ldots;$$

on obtiendra pareillement des séries analogues pour $\frac{1}{e}$.

CASHMORE (London).

4859 (**1918**, 98) (H.-B. MATHIEU). — *Propriété du nombre* 343 *ou* 7^3 (**1919**, 28). — En posant : $x^2 + x + 1 = 343$, on trouve comme racine positive $x = 18$. Il en résulte que dans le système de base 18, les nombres 111, 888 sont des cubes parfaits respectivement égaux à 343 et à $2^3.343$.

En affirmant que le nombre 343 (**1919**, 28) est *le seul* qui, ajouté à ses parties aliquotes, donne pour somme un carré ($400 = 20^2$), M. Brocard fait une erreur.

Il eût fallu dire *le seul cube*, de même que 81 est *le seul bicarré*. L'équation

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = a^2,$$

ou

$$(x^2 + x)(x^2 + 1) = (a + 1)(a - 1),$$

n'admet en effet qu'une solution entière :

$$x = 3; \quad a = 11; \quad \text{et} \quad x^4 = 81.$$

Mais d'autres entiers tels que 3, 22, 94, 214, 382, etc., ajoutés à leurs parties aliquotes, fournissent aussi des carrés.

H. PACÉ.

Durissima conditio, a dit Kepler, *scribendi libros*, *praecipue mathematicos*.

Evidemment, il fallait dire : *le seul cube*, comme cela était spécifié dans l'énoncé, car il est manifeste qu'il y a une variété indéfinie entre la nature d'un nombre et celle de son addition à ses diviseurs, qui au total peut donner un nombre pair, ou impair, ou premier, ou composé, ou carré, etc.

H. BROCARD.

Autre réponse de M. H. Sebban.

TABLE DES QUESTIONS ET RÉPONSES.

Chacune des questions parues dans le Tome XXVI porte le numéro d'ordre avec lequel elle a été publiée. Les autres nombres de la Table indiquent les pages du Volume.

Nous avons cru inutile de continuer à signaler les Réponses ou Notes en portefeuille. L'indication des solutions reçues est, en effet, toujours mentionnée au fur et à mesure dans les *Avis divers* annexés aux numéros mensuels de l'*Intermédiaire* (deuxième ou troisième page de la couverture).

Questions posées. Tome I (1894).	Pages.	Réponses. Tome XXVI. Pages.
52.	20	9.
179.	94	171.
191.	97	171.
314.	179	75.

Tome II (1895).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
416.	5	171.
675.	386	105.
689.	402	106.

Tome III (1896).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
843.	126	9.
852.	149	107, 172.
871.	174	107.

Tome V (1898).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
1193.	2	107.
1241.	51	75.
1257.	76	172.

Questions posées. Tome VII (1900).	Pages.	Réponses. Tome XXVI. Pages.
1746.	81	172.
1822.	125	137.
1924.	308	173.

Questions posées. Tome VII (1900).	Pages.	Réponses. Tome XXVI. Pages.
1942.	332	174.
1976.	360	108.
1978.	402	109.

Tome VIII (1901).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
2043.	60	9.
2087.	131	10.
2162.	219	75.
2168.	221	109.
2172.	222	11.

Tome VIII (1901).	Pages.	Tome XXVI. Pages
2223.	276	76.
2234.	280	174.
2242.	309	76.
2250.	310	43.

Tome IX (1902)	Pages.	Tome XXVI. Pages
2258.	4	175.
2261.	4	137.
2277.	33	77.
2286.	36	77, 109, 175.

Tome IX (1902).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
2314.	91	78.
2315.	91	78.
2316.	91	78.
2363.	143	78.

Tome XI (1904).	Page.	Tome XXVI. Page.
2839.	259	43.

Tome XI (1904).	Page.	Tome XXVI. Pages.
2855.	285	78, 110, 176.

Tome XII (1905).	Page.	Tome XXVI. Page.
2923.	128	44.

Tome XII (1905).	Page.	Tome XXVI. Page.
2944.	172	176.

Tome XIV (1907).	Page.	Tome XXVI. Page.
3189.	75	111.

Tome XV (1908).	Page.	Tome XXVI. Page.
3393.	121.	177.

Tome XV (1908).	Page.	Tome XXVI. Page.
3474.	272.	178.

Tome XVI (1909).	Page.	Tome XXVI. Page.
549.	98	79.

Tome XVI (1909).	Page.	Tome XXVI. Page.
3576.	146	138.

Questions posées. Tome XVII (1910).	Pages.	Réponses. Tome XXVI. Pages.
3698.	121	179.
3717.	148	179.

Questions posées. Tome XVII (1910).	Page.	Réponses. Tome XXVI. Page.
3719.	149	79.

Tome XVIII (1911).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
3807.	4	180.
3890.	147	181.
3892.	148	139.
3897.	169	80, 140.

Tome XVIII (1911).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
3902.	171	143.
3929.	221	80.
3938.	242	111
3939.	243	81.

Tome XIX (1912).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4012.	97	181.
4037.	125	181.
4051.	169	81.

Tome XIX (1912).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4134.	266	112.
4148.	271	12.

Tome XX (1913).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4170.	27	182.
4190.	75	12.
4215.	102	81.

Tome XX (1913).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4274.	219	183.
4311.	267	112.
4312.	268	13.

Tome XXI (1914).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4347.	31	81.
4385.	97	82, 144.
4407.	123	183.

Tome XXI (1914).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4422.	147	183.
4435.	193	13, 113.

Tome XXII (1915).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4470.	52	44.
4474.	53	14.
4480.	73	183.
4481.	74	183.
4508.	104	184.
4509.	104	184.

Tome XXII (1915).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4521.	125	145.
4540.	170	185.
4545.	171	82.
4552.	194	146.
4553.	194	146.

Tome XXIII (1916)	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4613.	26	148.
4616.	27	15.
4621.	49	148.

Tome XXIII (1916).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4636.	75	44.
4682.	219	46.
4689.	220	83, 115.

Questions posées. Tome XXIV (1917).	Pages.	Réponses. Tome XXVI. Pages.
4732.	49	84, 115, 186.
4742.	55	150.
4745.	75	152.
4750.	78	117.
4759.	98	190.
4761.	99	46, 121, 190.

Questions posées. Tome XXIV (1917).	Pages.	Réponses. Tome XXVI. Pages.
4765.	101	122.
4769.	103	153.
4770.	103	154.
4771.	104	16, 122.
4777.	122	46.

Tome XXV (1918).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4793.	2	190.
4808.	6	122.
4814.	8	47.
4816.	26	50, 123.
4818.	27	17, 190.
4819.	28	51.
4823.	29	84.
4824.	29	17.
4829.	30	85.
4830.	31	19, 87.
4835.	49	54.
4836.	49	55.
4839.	50	55.
4840.	50	19.
4844.	74	57, 191.
4845.	74	19.

Tome XXV (1918).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4846.	74	23.
4851.	77	23, 87.
4853.	78	88.
4854.	79	25, 89.
4855.	80	26.
4856.	97	27.
4858.	97	27, 57.
4859.	98	28, 192.
4860.	98	30, 58.
4863.	100	30.
4866.	101	60.
4867.	101	31.
4868.	101	31.
4874.	124	63.
4875.	124	63.
4876.	125	90.

Tome XXVI (1919).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4887.	3	90.
4888.	3	90.
4894.	5	93, 155.
4896.	5	94.
4897.	6	94.
4898.	6	95.
4903.	35	123.
4904.	35	124.
4905.	35	125.

Tome XXVI (1919).	Pages.	Tome XXVI. Pages.
4906.	36	126.
4910.	37	127.
4911.	37	127.
4912.	37	128.
4915.	38	155.
4916.	38	156.
4917.	39	156.
4920.	66	157.
4933.	72	157.

Nota. — Dans ce Tableau, on n'a indiqué, quand il y a plusieurs réponses immédiatement consécutives à une même question, que la page où se trouve la première de ces réponses.

Rappel de questions non résolues antérieurement et reproduites au Tome XXVI (1919).

	Tome VIII (1901).	Tome XXVI.
	Page.	Page.
2249.	310	6.

	Tome IX (1902).	Tome XXVI.
	Pages.	Pages.
2258.	4	7.
2259.	4	7.
2260.	4	7.
2272.	8	7.
2273.	8	8.
2277.	33	8.
2286.	36	8.
2287.	36	8.
2288.	36	39.
2292.	39	39.
2304.	68	40.
2310.	90	40.
2311.	90	40.
2314.	91	41.
2316.	91	41.

	Tome IX (1902).	Tome XXVI.
	Pages.	Pages.
2317.	91	41.
2327.	93	41.
2329.	94	42.
2333.	95	42.
2336.	96	42.
2341.	115	134.
2350.	117	134.
2352.	118	135.
2358.	142	135.
2359.	142	135.
2362.	143	135.
2363.	143	136.
2371.	145	136.
2375.	170	136.
2390.	175	136.

D'après l'exemple de plusieurs journaux mathématiques, la Rédaction continue à reproduire les énoncés de questions demeurées sans réponse bien que posées dans l'*Intermédiaire* depuis de longues années.

TABLE DES QUESTIONS

CLASSÉES SUIVANT LES DIVISIONS DE L'INDEX DU RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La Table qui suit fait connaître le sujet général des différentes questions proposées.

Les nombres de cette Table sont les *numéros* des questions auxquelles se rapporte la division de l'Index du Répertoire.

A1	4911, 4912, 4919.
B1	4938, 4945, 4953, 4970, 4971, 4974, 4975. 4993.
B4	4945.
D2	4959.
H1	4977.
H2	4929.
H9	4942.
H10	4942.
H12	4930.
I1	4918, 4973, 4984.
I3	4902, 4949, 4985.
I16	4995.
I17	4905, 4963, 4964, 4965, 4966, 4967. 4968, 4969, 4972.
I19	4886, 4893, 4895, 4896, 4897, 4898, 4901, 4913, 4914, 4915, 4936, 4937, 4939, 4951, 4980, 4986, 4988, 4989, 4990, 4991, 4994, 4996, 4997, 4998, 4999, 5006.
I24	4935.
I25	4900.
J1	4892, 4952.
K¹1	4933, 4992.
K¹2	4958, 4960.
K¹8	4888.
K¹9	4983, 4987.
K¹13	4978.
K¹14	4884, 4916, 4932.
K¹21	4887.
K¹23	4976.
L¹7	4906.
L¹9	4890.
L¹15	4917.
L¹16	4956, 4957.
L²2	4904.
L²4	4883.
M¹1	4955.
M¹2	4979.
M¹5	4908, 4950.
M¹6	4962.
M¹8	4882, 4891.
M³3	4920.

M⁴ 6	4909.
N	4920.
O 2	4954.
Q 2	4944.
Q 3	4343.
Q 4	4894, 4903, 4921, 4922, 4923, 4924, 4925, 4926, 4927, 4928.
R 3	4931.
S 4	4947.
S 6	4899.
V	4940, 4941, 4961, 4980. 4981, 4982.
V 1	4948.
V 7	4885.
V 8	4946.
V 9	4907, 4910.
V 10	4889.
Σ	4881, 4934, 4936, 4937, 4945, 4965, 4966, 4972, 4995, 4996.

La lettre Σ désigne les sujets de recherches ou d'études pour lesquels une subdivision spéciale a été adoptée dans l'*Intermédiaire* (*voir* t. II, 1895, p. 177).

TABLE PAR NOMS D'AUTEURS

Les noms inscrits sont exclusivement ceux des auteurs de questions ou de réponses.

L'*italique* désigne les pseudonymes.

Les chiffres ordinaires indiquent les numéros des pages et se rapportent aux QUESTIONS POSÉES ; avec astérisque, ils désignent le rappel des questions au moment de la publication des réponses.

Les **caractères gras** sont réservés aux RÉPONSES annoncées ou publiées dans le texte.

Alemtejano (*Um.*), 185*.
Arcitenens, 171*.
Aubry (L.), **84**, **85**, **87**, **94**, **95**, **148**, **152**, **190**.
Aubry (V.), 8, 76*, 171*.
Auric (A.), 15*, **16**, **18**, 101, 102, 164.

Balitrand (F.), 4, **10**, **11**, **13**, **23**, 31*, 36, 37, **76**, **77**, 127*, 190*.
Bar (A.), 12*, 143*.
Barisien (E.-N.), 44*, 81*, 83*, 115*, 183*.
Beires (de) (R.-S.), 100.
Bickart (L.), **159**.
Boré (*C.*), 46*, 54*, 55*.
Bouchary, **17**.
Boulanger (A.), 7, 137*.
Borel (E.), 75*.
Boulloud (G.), 3, **19**, 38, 72, 90*, 156*.
Boutin (A.), 5, 9*, **27**, 100, 103, **124**, **125**, **128**, **157**.
Braid (*H.*), 75*, 108*, 109*.
Brocard (H.), 2, **9**, 9*, **12**, **19**, 19*. 23*, **27**, **28**, **29**, 30*, **31**, 34, 41, **44**, 46*, **46**, 47*, **51**, 57*, 63*, 66, 73, **76**, **78**, 81*, **81**, **82**, **83**, 90*, **94**, 99, **107**, 107*, **115**, 121*. **123**, **124**, **126**, **127**, **128**, 135, 136, **144**, **153**, **156**, **157**, 161, **172**, **175**, **179**, 179*, **181**, **183**, **186**, 190*, **190**, 191*, **192**.

Cahen (E.), 35.
Canon, 8, 77*.
Cashmore (M.), **22**, **54**, **126**, **192**.
Cassin (M.), 51*.
Chanzy (L.), 3.
Colucci (A.), 17*, **27**, 30*, 35, 36, 38, 39, 55*, **57**, 58*, 103, 124*, 125*, 126*, **155**, 156*, 162.

Derennes, 101.
Despujols, 2, 6, **15**, 26*, **54**, **63**, 74, 94*, 95*, **117**.
Duran Loriga, 42.

Elgnairt, 183*.
Enestrom (G.), 107*, 172*, **172**.
Escott (J.-B.), 109*, 172*, 177*.
Espanet (G.), 41, 78*, 183*.

Ferber, 43*, **44**.
Fitz-Patrick, 176*.
Fredholm (I.), 42.

Gérardin (A.), 14*, **18**, 38, 44*, 68,

69, 74, 84*, **94**, **96**, 103, 104, 115*, **122**, 129, 130, 131, **137**, 138*, **139**, **146**, 150*, 155*, 165, 166, 167, 168, 169, 170, **171**, **172**, **177**, **178**, **180**, **182**. **183**, 184*, **184**, **185**, 186*, **191**.
Goormaghtigh (R.), 3, **14**, **17**, **23**, **25**, **26**, **30**, **31**, **32**, **63**, **64**, **173**, **174**, **183**.
Goutard (J.), 70.
Guérin (E.), **122**.
Guimaraes (R.), 9*.

Hatzidakis, 11*.
Hazard (L.), 171*.
Hendlé (P.), 4, **30**, **47**, **49**, **60**, 63*, **64**, **89**, **90**, **125**, 127*, 148*, **148**. **157**, **176**, **184**.
Henroteau (P.), 82*, 144*.
Hitrovo (G.), 178*.

Kierboc (T.), **11**.
Kœchlin (H.), 73, 157*.

Lacet, 74.
Laisant (C.-A.), 146*.
Lecat (M.), 74, **75**, **79**, 79*, **80**, 80*, **81**, **82**, **83**, 97, 98, **106**, **107**, **108**, **109**, **111**, **112**, 112*, **113**, **115**, 130, 131, 132, 133, 139*, **140**, 140*, **143**, 168, 179*, **180**.
Lemaire (G.), **58**, 60*.
Lemoine (G.), 171*.
Lemoyne (T.), 79*.
Lerch (M.), 135.
Limaçon, 39.
Loria (Gino), 81*, 99, 172*.

Maillet (E.), 7, 40, 42, 43*, **43**, 75, 78*, **81**. **83**, 110*, 134. 161, 176*.
Majol (*E.-A*). 10*.
Malo (*E*), **183**.
Mannheim, 137*.
Marchay (R.), **128**
Mathieu (H.-B.), 27*, 28*, 181*, 192*.
Maupuis (G.), 135, 136.
Métrod (G.), 84*, 99, 100, 117*, **122**, **150**, 153*, 154.
Miola (A.), 109*.
Miot (E.), 180*.
Mongardon (L.), 82*, 183*.
Monnet (G.), 111.
Monteiro (Schiappe), **46**.
Montessus (R. de), 40, 50*, 123.
Montille (H. de), **21**, **24**, **26**, 31*.

Neubery, **160**.
Niewenglowski (B.), **77**, 106*.
Niewenglowski (G.-H.), 101*.
Nobel, 44.

Ocagne (M. d'), **32**.
Ono (T.), 19*, 46*.

Pacé (J.), **89**, **110**, 131, **156**, 162, **176**, **192**.
Parodi (H.), 152*.
Paulmier, 136, 181*.
Pehelharingtz (N.-R.), 3, **90**.
Petit-Bois (G.), 181*.
Poulet (P.), **30**, **50**, **60**, 71, **78**, **93**, **121**, **122**, **160**, **175**.
Prompt, 25*, **26**, 27*, 57*, 89*, 183*, 190*.

Quœrens, 148*, 183*,
Quijano (G.), 80*.
Rabut (C), 105*.
Ratat (*R.*), **54**, 122*.
Rédaction (La), 1, 2, 9, 33, **46**, **54**, **55**, 70, 73, **80**; **153**, 164.
Rignaux (M.), 5. **9**, 17*, **26**, **27**. **28**, 38, 57*, 93*, 155*, 190*.
Robellaz, **54**.
Roche (L.), 67, 157*.
Rocquigny (G. de), 7, 8, 40, 77*, 107*, 109*. 136, 171*, 175*.
Rodallec, 182*.
Ropion (L.), 23*, 87*, **88**.
Rosace, 174*.
Rudis, 174*.
Russo (G.), 164.

Sebban (H.), 16*, 19*, **25**, **27**, 37, 39, 87*. 122*, 127*, 128*, 154*, **192**.
Ser (J.), **46**, 88*.
Sertorio (G.), 134.

Servant, 8.
Stamboul, 163.
Störmer (K.), 78*, 136.
Svoboda (J.), 81.

Tannery (P.), 76*.
Tariste (*V.-G.*), 13*, 85*, 145*.
Teilhet (P.-F.), 75*.
Thomas (K.), 12*.
Turrière (E.), 33.

Uber (*Is.*), **55**, **138**, **114**.

Valroff (L.), 164.
Vera (F.), **87**.
Vries (J. de), 13*, 113*, **157**.

Wargny (C.), 40.
Wigert (S.), 35, 123*.

Zed, 111*.
Zéro, **61**, 171.

Les Tables précédentes ont été rédigées, cette année, par M. Maluski, et vérifiées par M. E. Maillet.

La Rédaction.

ERRATA.

Tome XIV (1907).

Page 116, ligne 8 en remontant, *au lieu de* (**1904**, 203), *lire* (**1904**, 103).

Tome XXIII (1916).

Page 73, ligne 1 du Nota, *au lieu de* (**1902**, 230), *lire* (**1902**, 320).
» 161, ligne 15, *au lieu de* (**1902**, 329), *lire* (**1902**, 320).
» 228, ligne 7 en remontant, *après* égal à 3, *ajouter* ou à 1.

Tome XXIV (1917).

Page 113, lignes 8 et 9, *au lieu de* $-a\sin\varphi+\cos\varphi)$, *lire* $-a(\sin\varphi+\cos\varphi)$.
» 153, *au lieu de* page 75, ligne 91, *lire* ligne 9.
» 153, *au lieu de* page 89, ligne 16, *lire* ligne 15.

Tome XXV (1918).

Page 40, dans l'équation (4), *au lieu de* $2zxy$, *lire* $2zx$.
» 92, ligne 15, *après* « passant », *ajouter* « deux fois ».
» 105, ligne 8 en remontant, *au lieu de* leminscate, *lire* lemniscate.
» 153, les errata indiqués pour 1915 sont ceux de 1917.

Tome XXVI (1919).

Page 92, ligne 2 en remontant, *au lieu de* $-(AC+BD)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\delta}{2}$,

lire $+(AC+BD)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\delta}{2}$.

» 93, ligne 8, *au lieu de* $\dfrac{+b\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2}}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\delta)}$,

lire $\dfrac{+b\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2}}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\delta)}$.

Page 93, ligne 9, *au lieu de* $\dfrac{+c\cos\dfrac{\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2}}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma+\delta)}$,

lire $\dfrac{+c\cos\dfrac{\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2}}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma-\delta)}$.

» 108, ligne 1 en remontant, *au lieu de* Merck, *lire* Merct.

» 108, ligne 10 en remontant, *au lieu de* lÿfferbœck, *lire* Cÿfferbœck

» 120, ligne 6, *au lieu de* $\gamma_n^{n-3} = \dfrac{2n(n-4)(2n-1)}{6}$,

lire $\gamma_n^{n-3} = \dfrac{2n(n-4)(2n-7)}{6}$.

» 122, ligne 8, *au lieu de* $\varphi(2^{16}) = 2^8$, *lire* $\varphi(2^{16}) = 2^{15}$.

» 122, ligne 9, *au lieu de* $\varphi(2^{32}) = 2^{16}$, *lire* $\varphi(2^{32}) = 2^{31}$.

» 146, ligne 10, *ajouter* « pour d facteur de n et $< n$ ».

» 146, ligne 19, *au lieu de* $(p+1p)$, *lire* $(p+1)p$.

» 151, ligne 13, *au lieu de* $b^2+2b^2=3d^2$, *lire* $b^2+2d^2=3v^2$.

» 152, ligne 4, *au lieu de* (3) $b^2=2t^2+2v^2$, $d^2=2v^2-t^2$,
lire $b^2=2t^2+2v^2$, (3) $d^2=2v^2-t^2$.

» 152, ligne 13, *au lieu de* a^2, *lire* h^2.

» 152, lignes 14 et 16, *au lieu de* $9e^2g^2$, *lire* $9f^2g^2$.

» 160, ligne 3, *au lieu de* côté AB, *lire* triangle ABC.

» 160, ligne 7, ouvrir la parenthèse entre Σ et xy et la fermer après $zx \sin B$.

» 160, ligne 10, *au lieu de* podaire M, *lire* podaire de M.

» 160, ligne 2 en remontant, *au lieu de* $\dfrac{a\sigma\cot\lambda}{s-\sigma^2}$, *lire* $\dfrac{a\sigma\cot\lambda}{s-2\sigma}$.

» 179, ligne 23, *au lieu de* non supposé, *lire* supposé.

» 191, ligne 4 en remontant, *au lieu de* $n=2$, $m+1$, *lire* $n=2(m+1)$.

» 192, ligne 3, *au lieu de* $n=4$, $m-1$, *lire* $n=4(m-1)$.

59575 Paris — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, Quai des Grands-Augustins, 55.

L'INTERMÉDIAIRE
DES
MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET ÉMILE LEMOINE

DIRECTEUR-FONDATEUR

C.-A. LAISANT

Docteur ès Sciences
Ancien Examinateur à l'École Polytechnique

DIRECTEURS-RÉDACTEURS

Ed. MAILLET
Docteur ès Sciences
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées
Examinateur à l'École Polytechnique

A. MALUSKI
Agrégé de Mathématiques
Ancien Élève de l'École Normale supérieure
Proviseur du Lycée de Sceaux

A. BOULANGER
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers
Répétiteur et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique

Publication honorée d'une souscription du Ministère
de l'Instruction publique

TOME XXVI — 1919

TABLE DES MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1919

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6e)

Majoration temporaire : 100 0/0

ANDRÉ (**Désiré**), Ancien Élève de l'École Normale supérieure. — **Des notations mathématiques.** *Énumération, choix et usage.* In-8 (25-16) de XVIII-501 pages; 1909..... 16 fr.

BACHET, sieur de **MÉZIRIAC.** — **Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres.** 4e édition, revue et simplifiée. In-8 (21-15) de VI-163 pages; 1905..... 3 fr. 50

BOYER (**J.**). — **Histoire des Mathématiques.** 1 vol. in-8 (23-14) de 260 pages, avec 34 fig. et grav. hors texte, cart. (*B. S.*); 1900... 5 fr.

CONTENSON (**Louis de**), Ingénieur E. C. P. — **La Certitude mathématique.** — **Les fondements mathématiques dans l'hypothèse de la philosophie critique (système cartéso-kantien).** In-8 (25-16) de 96 pages; 1914..... 3 fr. 25

CREMONA (**Luigi**). — **Opere matematiche**, publicate sotto gli auspicii della R. Accademia dei Lincei. Volumes in-4 (28-23) se vendant séparément.

FREYCINET (**de**), de l'Institut. — **Essais sur la Philosophie des Sciences** *Analyse. Mécanique.* 2e édition, in-8 (23-14); 1900..... 6 fr.

GOURSAT (**E.**), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse mathématique** *de la Faculté des Sciences de Paris.* 3 volumes in-8° (25-16), se vendant séparément.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques ;* 3e édition revue et augmentée. Volume de VI-668 pages, avec 44 figures; 1917..... 25 fr.

TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Equations différentielles.* 3e édition entièrement refondue. Volume de VI-670 pages, avec 39 figures; 1918..... 30 fr.

TOME III : *Intégrales infiniment voisines. Équations aux dérivées partielles du second ordre. Équations intégrales. Calcul des variations;* 2e édition entièrement refondue. Vol. de VI-668 pages, avec 23 figures; 1915..... 20 fr.

HAAG (**J.**), Professeur de la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand. — **Cours complet de Mathématiques spéciales.** Trois volumes in-8 (25-16) et trois volumes d'*Exercices résolus ou proposés.*

TOME I : *Algèbre et Analyse.* Volume de VI-402 pages, avec 44 fig. ; 1914..... 9 fr.
Exercices du Tome I. Vol. de IV-220 p., avec 14 fig. ; 1914. 7 fr. 50

TOME II : *Géométrie analytique*..... *Sous presse.*
Exercices du Tome II.

TOME III : *Mécanique. Géométrie descriptive. Trigonométrie. En prép.*
Exercices du Tome III.

LAURENT (**H.**), Examinateur à l'École Polytechnique. — **Cours de Mathématiques** à l'Institut agronomique. 1 Volume in-8 de 220 pages, avec 32 figures. Cartonné à l'anglaise; 1902..... 7 fr.

Majoration temporaire : 100 %

GUIMARAES (Rodolphe). — **Les mathématiques en Portugal.** APPENDICE II. In-8 (25-16) de 107 pages; 1911..... 4 fr.

LUCAS (Edouard), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. — **Récréations mathématiques.** 4 volumes in-8 (21-15), caractères elzévirs, titres en deux couleurs, se vendant séparément :

TOME I. — *Les Traversées. — Les Ponts. — Les Labyrinthes. — Les Reines. — Le Solitaire. — La Numération. — Le Baguenaudier. — Le Taquin.* 2e édition; 1891. Prix : Papier hollande, 12 fr. — Vélin, 7 fr. 50

TOME II. — *Qui perd gagne. — Les Dominos. — Les Marelles. — Le Parquet. — Le Casse-tête. — Les Jeux de demoiselles. — Le Jeu icosien d'Hamilton.* 2e éd.; 1896. Prix : Papier hollande, 12 fr. — Vélin, 7 fr. 50

TOME III. — *Le Calcul digital. — Machines arithmétiques. — Le Caméléon. — Les Jonctions de points. — Le Jeu militaire. — La Prise de la Bastille. — La Patte d'oie. — Le Fer à cheval. — Le Jeu américain. — Amusements par les jetons. — L'Etoile nationale. — Rouge et Noire;* 1893. Prix : Papier hollande, 9 fr. 50. — Vélin, 6 fr. 50.

TOME IV ET DERNIER. — *Le Calendrier perpétuel. — L'Arithmétique en boules — L'Arithmétique en bâtons. — Les Marelles au* XIIIe *siècle. — Les Carrés magiques de Fermat. — Les Réseaux et les dominos. — Les Régions et les quatre couleurs. — La Machine à marcher.* — Prix : Papier hollande, 12 fr. — Vélin, 7 fr. 50.

MARIE (Maximilien), Répétiteur de Mécanique et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Histoire des Sciences mathématiques et physiques.** 12 volumes petit in-8, caractères elzévir, titre en deux couleurs, se vendant séparément. Chaque volume..... 6 fr.

POINCARÉ (Henri). — **Œuvres de Henri Poincaré** publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, par G. DARBOUX, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. 10 volumes in-4 (28-23) se vendant séparément.

TOME I..... *Sous presse.*

TOME II, publié avec la collaboration de N. E. NÖRLUND, professeur à l'Université de Lund (Suède), et de ERNEST LEBON, professeur honoraire du Lycée Charlemagne. Volume de LXXVII-628 pages, avec 19 figures et un portrait de H. Poincaré; 1916..... 35 fr.

ROUCHÉ (Eugène), Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'Ecole Polytechnique, et **LÉVY (Lucien)**, Répétiteur d'Analyse et Examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique. — **Analyse infinitésimale** *à l'usage des Ingénieurs.* 2 volumes in-8 (25-16) se vendant séparément :

TOME I : CALCUL DIFFÉRENTIEL. *Dérivées et différentielles. Changements de variables. Séries. Formules de Taylor. Courbes planes et gauches Surfaces. Congruences. Complexes. Lignes tracées sur les surfaces.* Volume de VIII-557 pages, avec 45 figures; 1900..... 15 fr.

TOME II : CALCUL INTÉGRAL. *Intégrales indéfinies et définies. Séries de Fourier. Fonctions elliptiques. Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles. Calcul des variations.* Volume de XII-648 pages, avec 50 figures; 1903..... 15 fr.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS et Cie

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6e)

Majoration temporaire : 100 0/0

BOREL (Emile), Maître de Conférences à l'Ecole Normale supérieure. —**Collection de monographies sur la Théorie des fonctions**, publiée sous la direction d'Émile Borel. Volumes in-8 (25-16), se vendant séparément.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments et principes de la théorie des ensembles; applications à la théorie des fonctions*), par Émile Borel, 2e édition, 1914..... 7 fr. 50

Leçons sur les fonctions entières, par Émile Borel; 1900..... 3 fr. 50

Leçons sur les séries divergentes, par Émile Borel; 1901..... 4 fr. 50

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au College de France par Émile Borel, recueillies et rédigées par *Robert d'Adhémar*; 1902... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par Émile Borel, recueillies et rédigées par *Ludovic Zoretti*; 1903.... 3 fr. 50

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France, par Henri Lebesgue; 1904..... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'Ecole Normale supérieure par Émile Borel et rédigées par *Maurice Fréchet*, avec des Notes par Paul Painlevé et Henri Lebesgue; 1905..... 4 fr. 50

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France, par René Baire, rédigées par *A. Denjoy*; 1905..... 3 fr. 50

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par Ernst Lindelöf; 1905..... 3 fr. 50

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France, par Henri Lebesgue; 1906..... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles de premier ordre, professées au Collège de France par Pierre Boutroux, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier; avec une *Note* de Paul Painlevé; 1908..... 6 fr. 50

Principes de la théorie des fonctions entières de genre infini, par Otto Blumenthal; 1910..... 5 fr. 50

Leçons sur la théorie de la croissance, professées à la Fté des Sciences de Paris, par É. Borel, recueillies et rédigées par *A. Denjoy*, 1910.. 5 fr. 50

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par Paul Montel; 1910..... 3 fr. 50

Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France, par Ludovic Zoretti; 1911..... 3 fr. 75

Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, professées à la Fté des Sciences de Rome en 1910 par Vito Volterra et publiées par *M. Tomasseti* et *F.-S. Zarlatti*; 1913.. 5 fr. 50

Leçons sur les singularités des fonctions analytiques, professées à l'Université de Budapest, par Paul Dienes; 1913..... 5 fr. 50

Leçons sur les fonctions de lignes, professées à la Sorbonne en 1911, par Vito Volterra, recueillies et rédigées, par *J. Perès*; 1913.. 7 fr. 50

Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues; par F. Riesz; 1913..... 6 fr. 50

Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. Leçons professées au Collège de France par C. de la Vallée Poussin, Professeur à l'Université de Louvain, Membre correspondant de l'Institut de France; 1916..... 7 fr

Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes, professées à la Sorbonne en 1913-1914, par Maxime Bôcher, recueillies et rédigées par *Gaston Julia*; 1917..... 5 fr.

Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, par Émile Borel, rédigées par *G. Julia*; 1917..... 7 fr. 50

59575-20 Paris.— Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5IN C001
L'INTERMEDIARE DES MATHEMATICIENS PARIS
26 1919
3 0112 016784511